MA3701 Optimización, 2016-2. 22 de septiembre de 2016
Profesor: Vicente Acuña.
Auxiliar: Raúl Pezoa.

Pauta P2 d)

P2) d) Sea C un conjunto convexo y $x \in C$. Muestre que x es un punto extremo de C si y solo si $C \setminus \{x\}$ es convexo.

Solución: Recordemos que x es punto extremo de C convexo si

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z, \quad \text{con } y, z \in C, \lambda \in (0,1) \Rightarrow x = y \vee x = z$$

es decir no se escribe como combinación convexa de otros puntos.

$\boxed{\Rightarrow}$ x punto extremo de C, queremos probar que $C \backslash \{x\}$ es convexo.

Sean $y, z \in C\backslash\{x\}$, por demostrar que $\lambda y + (1-\lambda)z \in C\backslash\{x\} \quad \forall \lambda \in (0,1)$. Supongamos que no, i.e.

$$\exists \overline{\lambda} \in (0,1) \text{ tal que } \overline{\lambda} y + (1-\overline{\lambda})z \notin C\backslash\{x\}$$

pero sabemos que C es convexo, luego $\overline{\lambda} y + (1-\overline{\lambda})z \in C$, por lo que la única posibilidad para que pase lo anterior es que $\overline{\lambda} y + (1-\overline{\lambda})z = x \Rightarrow x = y \vee x = z$ (x es punto extremo), pero tomamos $y, z \in C\backslash\{x\} \Rightarrow\Leftarrow$. Luego $\lambda y + (1-\lambda)z \in C\backslash\{x\} \quad \forall \lambda \in (0,1)$, por lo que $C\backslash\{x\}$ es convexo.

$\boxed{\Leftarrow}$ $C\backslash\{x\}$ es convexo, queremos probar que x es punto extremo de C.

Supongamos que no, luego $\exists y \neq x, \exists z \neq x$ y $\exists \overline{\lambda} \in (0,1)$ tales que $x = \overline{\lambda} y + (1-\overline{\lambda})z$, pero como $y \neq x, z \neq x \Rightarrow y, z \in C\backslash\{x\}$.
Además, $C\backslash\{x\}$ es convexo $\Rightarrow x = \overline{\lambda} y + (1-\overline{\lambda})z \in C\backslash\{x\} \Rightarrow\Leftarrow$, y luego x es punto extremo de C.