

GUÍA EJERCICIOS 3

- Obtenga la densidad de la suma de dos variables independientes con distribución  $\text{unif}(0, 1)$ .
- Sean  $X$  e  $Y$  las coordenadas de un punto escogido uniformemente al azar en el círculo de radio 1 centrado en el origen. Obtenga la distribución conjunta y las densidades marginales de las coordenadas polares  $(R, \Theta)$  del punto  $(X, Y)$ . ¿Son independientes  $R$  y  $\Theta$ ?
- Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias  $U = XY, V = X/Y$ .

- Calcule la densidad conjunta de  $(U, V)$ .
  - Encuentre las densidades marginales de  $U$  y  $V$ .
- Sea  $U_1, U_2, \dots$  una secuencia de variables  $\text{unif}(0, 1)$  independientes. Dado  $x \in [0, 1]$  fijo, definimos la variable aleatoria  $N(x) = \min\{n : \sum_{i=1}^n U_i > x\}$ , es decir, la mínima cantidad de variables  $U_i$  que debemos sumar para exceder  $x$ . Calcule  $m(x) = \mathbb{E}(N(x))$ . *Indicación:* condicionando en  $U_1$ , encuentre una ecuación diferencial para  $m(x)$ .
  - Se lanza  $n$  veces de manera independiente una moneda con probabilidad  $p$  de cara, donde  $p$  es el resultado de la realización de otra variable aleatoria  $U$  con distribución  $\text{unif}(0, 1)$ , independiente de los lanzamientos. Sea  $X$  la cantidad de caras que se obtienen. Demuestre que para todo  $i = 0, \dots, n$  se tiene que  $p_X(i) = \frac{1}{n+1}$ . *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, calcule  $P(X = i)$  condicionando en los posibles resultados de  $U$ ; utilice sin demostrar el hecho que

$$\int_0^1 p^i (1-p)^{n-i} dp = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}.$$

- En una fiesta de año nuevo a la que usted asiste, se lanza al aire una gran cantidad de diminutos papeles blancos y rojos. Los papeles blancos provienen de un contenedor esférico, y los papeles rojos de una caja cúbica, de manera que el diámetro del contenedor esférico es igual a la arista de la caja (ambos poseen igual cantidad de papeles por  $\text{cm}^3$ ). Al llegar a su casa usted se percató que adheridos a su ropa hay  $b$  papeles blancos y  $r$  papeles rojos. Argumente por qué  $6b/r$  es una buena aproximación de  $\pi$ ; explicité sus supuestos.
- Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables i.i.d. y positivas, tal que  $\lambda = \mathbb{E} \log(X_1)$  es finita. Pruebe que la *media geométrica* de las primeras  $n$  variables, es decir  $(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$ , converge casi seguramente cuando  $n \rightarrow \infty$ , y calcule su límite.
- Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.
  - Dé una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.
  - Suponga de aquí en adelante que se sabe que la varianza es 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?

- ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99%, el promedio de notas esté entre 70 y 80? Obtenga un resultado sin utilizar el teorema central del límite, y otro utilizándolo.

- Cincuenta números se aproximan al entero más cercano y después se suman. Los errores de aproximación de cada uno se modelan como variables independientes y uniformes en el intervalo  $(-1/2, 1/2)$ .
  - Encuentre una cota para la probabilidad de que la suma resultante difiera de la suma exacta por 3 o más.
  - Usando el TCL, aproxime la probabilidad anterior.
- Se dispone de 40 baterías, cada una de las cuales puede ser de tipo A o B con igual probabilidad e independiente del resto. La duración media de una batería tipo A es de 50, con raíz de la varianza de 15, mientras que para el tipo B la media es 30 y la raíz de la varianza es 6.
  - Aproxime la probabilidad de que la duración total de las 40 baterías exceda 1700.
  - Suponiendo que se sabe que hay 20 baterías de cada tipo, rehaga la parte anterior.
- Sea  $X$  variable aleatoria binomial con parámetros  $n$  y  $p$ .
  - Sean  $\hat{p}_1 = X/n$  y  $\hat{p}_2 = (X+1)/(n+2)$  estimadores de  $p$ . Calcule  $\text{ECM}(\hat{p}_1)$  y  $\text{ECM}(\hat{p}_2)$ . ¿Para qué valores de  $p$  es mejor  $\hat{p}_2$  de acuerdo al criterio del error cuadrático medio?
  - Sea  $\hat{\sigma}^2 = X(1-X/n)$  un estimador de  $\sigma^2 = \text{var}(X)$ . Muestre que  $\hat{\sigma}^2$  es sesgado y modifíquelo para obtener un estimador insesgado de  $\sigma^2$ .
- El tiempo que transcurre entre cada llamada recibida en una central de atención telefónica sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda$  desconocido. Se toma una m.a.s.  $X_1, \dots, X_n$  de estos tiempos.
  - Obtenga estimadores para  $\lambda$  usando el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud.
  - Muestre que estos estimadores convergen casi seguramente a  $\lambda$  cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.
- Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. proveniente de una distribución con densidad dada por  $f(x) = rx^{r-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ , donde  $r > 0$  es un parámetro desconocido. Encuentre estimadores para  $r$  usando el método de máxima verosimilitud y de los momentos.
- Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. con densidad común dada por  $f(x; \theta) = \alpha x^{\alpha-1} \theta^{-\alpha} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$ , donde  $\alpha > 0$  es conocido y  $\theta$  es desconocido. Obtenga estimadores para  $\theta$  con los métodos de máxima verosimilitud y de los momentos. Verifique si dichos estimadores son insesgados; en caso que alguno no lo sea, modifíquelo para obtener un estimador insesgado.
- Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. proveniente de una  $\text{Gamma}(\theta, \lambda)$ , donde  $\theta > 1$  es conocido.
  - Muestre que los estimadores de  $\lambda$  del método de los momentos y el de máxima verosimilitud coinciden con  $\hat{\lambda} = \theta/\bar{X}$ .

- b) Concluya que  $\hat{\lambda}$  converge casi seguramente a  $\lambda$  cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.
- c) Muestre que la esperanza de  $\hat{\lambda}$  es  $\lambda n\theta/(n\theta - 1)$  y modifíquelo para obtener un estimador insesgado  $\tilde{\lambda}$ . Suponiendo  $\theta > 2$ , calcule la varianza de  $\tilde{\lambda}$  y muestre que es un estimador consistente. *Indicación:* utilice el hecho que  $\sum_{i=1}^n X_i$  tiene distribución Gamma( $n\theta, \lambda$ ).

16. En base a una m.a.s., se desea encontrar un intervalo de confianza al nivel  $1 - \alpha$  para la media  $\mu$  de una variable  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , con  $\sigma^2$  conocido. Si se desea que el largo del intervalo sea a lo más  $L$ , ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra?
17. Usted toma una muestra de 64 mediciones independientes de la luminosidad de una cierta estrella, obteniendo un promedio de 21,5. Asumiendo datos normales con media  $\mu$ , correspondiente a la luminosidad real, y varianza  $\sigma^2 = 9$ , obtenga un intervalo de confianza para  $\mu$  al nivel 95%. ¿Cuántas mediciones adicionales se necesitan para reducir el largo del intervalo anterior en un 20%, manteniendo el nivel de confianza?
18. Se toma una muestra de 24 mediciones independientes para la temperatura de fusión del plomo, obteniendo un promedio de 336 y una varianza muestral insesgada de 441. Encuentre intervalos de confianza para la media  $\mu$  y la varianza real  $\sigma^2$  al nivel 95%.
19. Los consumos mensuales de energía eléctrica en su hogar durante la última temporada otoño-invierno fueron de 196, 198, 202, 206, 196 y 202, en unidades de kWh. Asumiendo datos normales con ambos parámetros desconocidos, encuentre un intervalo de confianza al nivel 90% para el consumo medio de la temporada.
20. En un laboratorio usted genera 7 cultivos de una determinada bacteria, cuyas biomazas resultaron ser

5,4 8,0 2,0 6,0 5,6 7,0 1,0.

Asumiendo que los datos conforman una m.a.s. proveniente de una normal, obtenga un intervalo de confianza para la varianza  $\sigma^2$  al nivel 90%.

21. Se observó que 10 de un total de 100 veces, el tiempo de espera del bus fue mayor a 10 minutos. Entregue un intervalo de confianza al nivel 90% para la probabilidad  $p$  de que un bus tarde más de 10 minutos.
22. El tiempo de vida de un cierto microorganismo se modela como una variable normal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$  desconocidos. En un laboratorio, usted toma una muestra aleatoria simple con  $n = 16$  realizaciones de esta variable, y obtiene un promedio de 20,0 y un estimador insesgado de la varianza de 8,1.
- a) Obtenga un intervalo de confianza para  $\mu$  al nivel 95%.
- b) Obtenga un intervalo de confianza para  $\sigma^2$  al nivel 95%.
- c) Una compañera de laboratorio toma una muestra de tamaño  $m = 20$ , obteniendo el mismo promedio de 20,0 y un estimador insesgado de la varianza de 10,0. Si esta muestra se *consolida* con la suya (es decir, se trabaja con el total de  $n + m = 36$  datos), ¿cuál es el nuevo intervalo de confianza para  $\mu$  al mismo nivel 95%?
- d) Un reciente estudio realizado por otro prestigioso

laboratorio muestra que para todo efecto práctico, la varianza real del tiempo de vida del microorganismo puede asumirse igual a  $\sigma^2 = 9,0$ . Usando la muestra consolidada (con  $n + m = 36$  datos), ¿cuál es ahora el intervalo de confianza para  $\mu$  al mismo nivel 95%?

23. Como parte de un informe para un ramo de su universidad, usted realiza un pequeño estudio evaluando la calidad de un cierto producto, para lo cual usted toma una muestra de tamaño 13 y obtiene una desviación estándar (es decir, la raíz del estimador insesgado de la varianza) de 12,0.
- a) Una de las características más importantes de la variable en estudio es su variabilidad  $\sigma^2$  (es decir, la varianza). Encuentre un intervalo de confianza para  $\sigma^2$  al nivel 90%.
- b) Un compañero de clase realizó el mismo estudio con el mismo tamaño de muestra y el mismo nivel de confianza, obteniendo un intervalo cuyo largo es 43,75% menor que el obtenido por usted. ¿Cuál es el valor de la desviación estándar obtenida por su compañero?
- c) Al comparar las muestras, con su compañero se dan cuenta que ambos obtuvieron el mismo promedio. Para mejorar la calidad de los resultados, ustedes deciden trabajar con el total de 26 datos obtenidos en conjunto por ambos. Manteniendo el nivel de confianza, ¿cuál es ahora el intervalo para  $\sigma^2$ ?
24. Sea  $X$  variable aleatoria con densidad  $f_X(x) = \frac{x}{\theta} e^{-x^2/(2\theta)} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ , donde  $\theta > 0$  es un parámetro desconocido. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. con densidad común  $f_X$ .
- a) Obtenga  $\hat{\theta}$ , el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$ .
- b) Muestre que  $X^2/2 \sim \exp(1/\theta)$ .
- c) Muestre que  $\hat{\theta}$  converge casi seguramente a  $\theta$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- d) Muestre que el estadístico  $Z = (\hat{\theta} - \theta)/(\theta/\sqrt{n})$  posee distribución aproximadamente normal estándar.
- e) Utilice el estadístico  $Z$  para encontrar un intervalo de confianza aproximado genérico para  $\theta$  al nivel  $1 - \alpha$ . Para  $n = 49$ ,  $\alpha = 5\%$  y suponiendo que el valor observado de  $\hat{\theta}$  es de 20,0, obtenga el intervalo explícitamente.
25. Una marca de televisores afirma que 60% del público prefiere dicha marca, pero usted cree que dicha afirmación es exagerada. Para salir de la duda, usted accede a los datos de venta de una multitienda, los cuales indican que 324 de 600 clientes prefirieron la marca durante el último trimestre. Plantee las hipótesis del test correspondiente e indique su conclusión para  $\alpha = 5\%$ .
26. Hay dos candidatos para las elecciones del centro de alumnos de su facultad: A y B. Usted cree que el candidato A sacará más del 50% de los votos válidos. Para verificarlo, usted planea realizar una encuesta a 144 personas (suponga que todas se inclinan por alguno de los dos). Para  $\alpha = 2,28\%$ , ¿cuál es la mínima cantidad de personas encuestadas que prefieren A de modo que el test correspondiente concuerde con su afirmación?