MA3403-01 Probabilidades y Estadística
Profesor: Servet Martínez A.
Auxiliares: Raimundo Saona Urmeneta y Abner Turkieltaub

Auxiliar 12

09 de Diciembre de 2016

S1 Esperanza y Cuociente

Considere X, Y v.a. i.i.d tal que $X, Y > 0$ y $\mathbb{E}(X) = \mu < \infty$.
Muestre que:

$$\mathbb{E}(\frac{X}{X+Y}) = \frac{1}{2}$$

Argumente por qué la siguiente demostración es errónea:

$$\mathbb{E}(\frac{X}{X+Y}) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X+Y)} = \frac{\mu}{2\mu} = \frac{1}{2}$$

Indicación: Utilice argumentos de simetría.

S2 Ley de los Grandes Números, Cuociente

Considere X, Y v.a. con esperanzas $\mu_X, \mu_Y < \infty$, donde $\mu_Y \neq 0$ e Y es absolutamente continua.
Considere $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones i.i.d. cuya ley corresponde a las de X e Y correspondientemente.
Muestre que:

$$\frac{\sum_{i<n} X_i}{\sum_{i<n} Y_i} \xrightarrow{C.S.} \frac{\mu_X}{\mu_Y}$$

¿Se necesita independencia entre $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

S3 Paseo aleatorio, transitorio C.S.

Considere $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. tal que $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = -1)$. Se define $P_n := \sum_{i<n} X_i$ el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ y también $N_0 := |\{n \in \mathbb{N} : P_n = 0\}|$ la cantidad de veces que se pasa por el origen.
Muestre que:

$$p \neq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad N_0 < \infty \text{ C.S.}$$

S4 Aproximar por distribución normal, Cubrir demanda

Suponga que está a cargo de la alimentación en un evento, al cual van a asistir 120 personas e incluye un almuerzo. Usted tiene que decidir cuántos alfajores de chocolate comprar como postres para los comensales.
La verdad es que sólo puede ofrecer 3 tipos de postres: jalea, alfajor y plátano. Además, un comensal sujeto a elegir entre estas 3 opciones, en promedio, se comporta de la siguiente forma: elije 1/6 de las veces jales, 1/2 alfajor, 1/6 plátano y 1/6 no quiere postre.
Dado esta información, a usted, como organizador del evento, le exigen asegurarse que todos puedan elegir libremente un alfajor de chocolate con un margen de confianza del 5 % (¿qué cree que significa esta última frase?, ¿Podría ser un total fracaso su decisión?, ¿pondría usted sólo 60 alfajores?).
Calcule la cantidad de alfajores que debe comprar, o al menos aproxime dicha cantidad.
*Exíjale a su auxiliar que le muestre el verdadero valor y no sólo la aproximación.

S5 Teorema Central del Límite, tamaño de la muestra

Una fábrica produce un 5 % de artículos defectuosos. Suponga que usted quiere comprarle a esta fábrica una determinada cantidad de artículos y su jefe le ha puesto la condición que, de todos los artículos que compre, a lo más se habrán comprado un 6 % de objetos defectuosos.

Argumente por qué comprar infinitos artículos asegura poder cumplir esta condición.

Discuta por qué nunca podrá estar 100 % de cumplir la condición de su jefe.

¿Cuántos artículos puede comprar de manera que la proporción de artículos defectuosos sea inferior al 6 % con probabilidad mayor que 0,99?

Indicación: Aplique el TCL para aproximar la probabilidad y despeje n de la desigualdad resultante.