

MA3403-01 Probabilidades y Estadística

Profesor: Servet Martínez A.

Auxiliares: Raimundo Saona Urmeneta y Abner Turkieltaub

**Auxiliar 10**

25 de Noviembre de 2016

S1 Variable exponencial, simulación a partir de una uniforme

En esta pregunta veremos cómo simular una variable exponencial usando una uniforme. Recordemos que $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ssi tiene una densidad dada por $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{t>0}$.

Sea $U \sim \text{Uniforme}((0, 1))$. Pruebe que:

$$Z := -\frac{\log(1-U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

S2 Vector gaussiano a partir de uniformes

Replicar la idea anterior para una variable normal implica calcular la inversa de la función erf , lo cual es muy difícil (analítica y numéricamente). Por esto se propone el siguiente método.

Sean $U, V \sim U((0, 1))$ i.i.d.

Muestre que:

$$Z := \sqrt{-2\log(U)} \cos(2\pi V), W := \sqrt{-2\log(U)} \sin(2\pi V) \sim N(0, 1) \text{ i.i.d.}$$

S3 Covarianza

1) Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera. Construya X, Y v.a. tal que $\text{Cov}(X, Y) = a$.

2) Discuta la siguiente afirmación:

$$X \geq 0, Y \geq 0 \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) \geq 0$$

3) Demuestre que:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

4) Sea $X, Y \sim N(0, 1)$ i.i.d. Muestre que $(W, Z) := (X+Y, X-Y)$ es un vector gaussiano de coordenadas independientes.

5) Discuta la siguiente afirmación:

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow X, Y \text{ independientes}$$

S4 Normal multivariada, gaussiana

Sea $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$ un vector gaussiano en \mathbb{R}^2 .

Argumente que Σ es una matriz simétrica.

Exponga las ley marginal de X .

Muestre que la ley condicional de X dado el evento $Y = y$ siguen siendo la ley de una gaussiana en \mathbb{R} .

Calcule la media y la varianza.

S5 Desigualdad de Markov

Suponga que el número de objetos producidos en una fábrica en una semana es un número aleatorio y tiene esperanza 50.

- 1) ¿Qué se puede decir de la probabilidad de que esta semana se fabriquen más de 75 objetos?
- 2) Si sabemos que la varianza en la producción semanal es de 25, ¿Qué se puede decir de la probabilidad de que la producción de esta semana esté entre 40 y 60?

S6 PROPUESTO: Teorema de cambio de variable(?)

Primero un caso sencillo.

Sea X v.a. de densidad $f_X(t) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|t|}$ para $\lambda > 0$. Encuentre la densidad de $|X|$, ¿por qué se puede aplicar el teorema? ¿se cumplen todas las hipótesis?

Ahora veamos uno un poco más complicado.

Usted ve una multimillonaria acompañada de sus dos hijos en el casino. Ella ha pagado la suma de \$100.000 por jugar al siguiente juego:

Usted simplemente debe elegir un número al azar entre 0 y $\pi/2$.

Luego, una máquina genera otro número, independiente del suyo, al azar dentro del intervalo $[0, (\pi/2)^{1/k}]$. Finalmente se le paga una aproximación del cuadrado de la tangente de la resta entre su número, y el de la máquina elevado a k .

Antes de jugar uno de sus hijos le propone decir 0, argumentando que así se podrá ganar el máximo dinero posible. Por otro lado, su otro hijo le propone decir un número al azar entre 0 y $\pi/2$, argumentado que los algoritmos no deterministas son mejores a los deterministas.

Compare ambas estrategias en relación al dinero obtenido en esperanza y ofrézcale una asesoría matemática a la millonaria antes de que empiecen a jugar.