MA3403-01 Probabilidades y Estadística
Profesor: Servet Martínez A.
Auxiliares: Raimundo Saona Urmeneta y Abner Turkieltaub

Auxiliar 6

28 de Octubre de 2016

S1 Poisson, Esperanza, Varianza, Momentos

Considere $X \sim$Poisson(λ), con $\lambda > 0$. Cuando se realiza un estudio y se trabaja con datos, se entiende que el "promedio", la "varianza.^{en}tregan información sobre éstos pero estos parámetros no los definen completamente. Siguiendo es ta idea, calcule:

- $\mathbb{E}(X)$.
- Muestre que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$ y calcúlela.
- $\mathbb{E}(X^k)$, para $k \in \mathbb{N}$.

Una forma de presentar todos los momentos de una variables en un solo objeto matemático es tomar la función $\psi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX})$$

Notemos que el dominio de ψ_X dependerá del comportamiento de la v.a. X.
Muestre que:

$$\psi_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$$
$$\psi_X(s) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(X^k)\frac{s^k}{k!}$$

Hint: Utilice Taylor y suponga que $\psi_X'(s) = \mathbb{E}((e^{sX})')$.

S2 Propiedades de $\mathbb{E}$ y Var

Considere X, Y v.a. reales. Muestre que $\mathbb{E}$ es un operador lineal, ie:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}(\alpha X + Y) = \alpha\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

El operador Var(.) también está escrito en términos de $\mathbb{E}(.)$, ¿será lineal?

Considere g una función boreliana y X una variable aleatoria discreta. Considere $I = X(\Omega), J = g(I)$.
Muestre que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{a\in J} a\mathbb{P}(g(X) = a)\\ &= \sum_{b\in I} g(b)\mathbb{P}(X = b)\end{aligned}$$

Para justificar lo recién escrito, ¿será que $g(X)$ es v.a.?

S3 Funciones borelianas y v.a.

Muestre que para $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $X_1, ..., X_k$ v.a. se tiene que:

$$g(X1, ..., X_k) \text{ es v.a.}$$

Para esto muestre el siguiente lema:

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ v.a.} \quad \text{ssi} \quad X^{-1}(C) \in \mathcal{F} \quad \forall C \in \mathcal{C}, \text{ con } \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Concluya que para X, Y v.a., $\text{mín}(X, Y), \text{máx}(X, Y), \lambda X$ son v.a. ($\lambda \in \mathbb{R}$).

S4 Esperanza Condicional, mejor predictor, independencia

¿Cómo se entienden las esperanzas condicionales? Considere X, Y v.a. uniformes en $\{1, ..., 10\}$ e independientes (i.i.d.). Definimos $Z = XY$, muestre que:

$$\mathbb{E}(Z|X), \mathbb{E}(Z|Y) \text{ son i.i.d.} \sim \mathbb{E}(X) * U(\{1, ..., 10\})$$

Concluya que en general se tiene:

$$X, Y \text{ v.a. independientes discretas} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X|Y) \equiv \mathbb{E}(X)$$

¿Qué es la varianza condicional? ¿Ocurre algo parecido?
Considere el mismo ejemplo: $Z = XY$. Muestre que:

$$\text{Var}(Z|X), \text{Var}(Z|Y) \text{ son i.i.d.} \sim \text{Var}(X)(U(\{1, ..., 10\}))^2$$

De nuevo, en general, se tiene:

$$X, Y \text{ v.a. independientes discretas} \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(X|Y) \equiv \text{Var}(X)$$

S5 Poisson, Autos en intersección, ¿de dónde vienen?

Considere la unión de dos vías en la carretera. En un periodo de tiempo determinado sabemos que el número de autos que vienen desde la vía 1 se comporta como una v.a. de Poisson(λ) y desde a vía 2 Poisson(γ). (¿Cómo distribuye el número de autos total en ese periodo?)
Llamemos X, Y al número de autos que viene desde cada vía. Muestre que:

$$\mathbb{E}(X|X+Y)\frac{\lambda+\gamma}{\lambda} \sim \text{Poisson}(\lambda+\gamma)$$