MA3403-01 Probabilidades y Estadística
Profesor: Servet Martínez A.
Auxiliares: Raimundo Saona Urmeneta y Abner Turkieltaub

Auxiliar 2

23 de Septiembre de 2016

S1 Sigma-álgebra, Numerable, Probabilidad

Considere Ω un conjunto no vacío y $\mathcal{L} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ la clase de los singletons.
Muestre que

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{A \subseteq \Omega : A \text{ numerable } \vee A^c \text{ numerable }\}$$

Considere ahora $\mathbb{P}$ en $(\Omega, \sigma(\mathcal{L}))$.
Muestre que

$$D := \{\{\omega\} : \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0\} \text{ es numerbale}$$

Concluya que

$$\mathbb{P}(D) < 1 \Rightarrow \Omega \text{ es no-numerable}$$

Por último, muestre que $\forall A \in \sigma(\mathcal{L})$ se verifica

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap D) & A \text{ numerable} \\ 1 - \mathbb{P}(A^c \cap D) & A^c \text{ numerable} \end{cases}$$

S2 Sigma-álgebra, función, pre-imagen

Considere X un conjunto no vacío, $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f : \Omega \to X$ una función.
Muestre que

$$\sigma_f := \{A \subseteq X : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} \text{ es una sigma-álgebra en } X$$

Aplicación: Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Muestre que:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

Muestre además que la σ-álgebra generada por $f(\mathcal{F})$ en X puede ser distinta a la σ-álgebra inducida por f en X, ie: $\exists f$ tq $\sigma(f(\mathcal{F})) \neq \sigma_f$.

S3 Borelianos, $\mathbb{R}^n$

Para $x, y \in \mathbb{R}$, definimos $R(x,y) := (-\infty, x] \times (-\infty, y]$
Muestre que

$$|a_1, a_2| \times |b_1, b_2| \in \sigma(\{R(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\})$$

donde $|$ puede ser reemplazado por $(\,,\,), [$ o $]$ y $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

S4 Propuesto: Sigma-álgebra, probabilidad

Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.
Muestre que

$$\{A \subseteq \Omega : \mathbb{P}(A) = 0 \vee \mathbb{P}(A) = 1\} \text{ es una sigma-álgebra en } \Omega$$

Hint: Utilice la continuidad de $\mathbb{P}$ para familias crecientes o decrecientes para deducir una de las condiciones sobre las σ-álgebras.