Profesor: Martín Matamala
Auxiliares: Bastián Espinoza, José Palacios
MA3101: Elementos de Algebra

Auxiliar Siete - Cuerpos, Galois

16 de Diciembre de 2016

P1. Sea $w \in k^a$ y f su polinomio mínimo sobre k. Todas las raíces de f tienen la misma multiplicidad. Además, si la característica de k es:

(i) 0, la multiplicidad de las raíces es 1.

(ii) $p > 0$, la multiplicidad es p^l, para algún $l \geq 0$, $[k(w) : k] = p^l [k(w) : k]_s$, y w^{p^l} es separable sobre k.

P2. Sea $f = X^4 + aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible, con raices $\pm\alpha, \pm\beta$, en un cuerpo de descomposición K de f. Llamemos $G = Gal(K/\mathbb{Q})$. Muestre que:

a) G es isomorfo a un subgrupo de D_8.

b) $G \cong \mathbb{Z}_4$ ssi $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}$.

c) $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ssi $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$

d) $G \cong D_8$ en otro caso.

Para terminar, encuentre el cuerpo de descomposición en $\mathbb{C}$ y el grupo de Galois de $X^4 - 4X^2 - 1$ y describa en detalle el reticulado de cuerpos intermedios de $K/\mathbb{Q}$.

P3. **Dedekind** Sea F/k una extensión de cuerpos y $\Sigma := \{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \subseteq Gal(F/k)$. Σ es l.i. sobre F.

P4. Resuelva los problemas geométricos clásicos griegos.

Propuesto Sea $f \in k[X]$ un polinomio de grado n y K su cuerpo de descomposición. Pruebe que $[K : k] \mid n!$.