Profesor: Martín Matamala
Auxiliares: Bastián Espinoza, José Palacios
MA3101: Elementos de Algebra

Auxiliar Cinco - Módulos sobre DIPs

25 de Noviembre de 2016

P1 Sea R un DIP y n un entero no negativo. Sean $m_1, ..., m_n \in R^n$, consideremos la matriz $A = (m_1\ m_2\ ...\ m_n)$ y el módulo $M =< \{m_1, ..., m_n\} >$. Escribamos $\Delta = det(A)$. Pruebe que son equivalentes:

a) $< \{m_1, ..., m_n\} >$ es l.i.

b) R^n/M es de torsión.

Pruebe que además se tiene que:

a) Si $R = \mathbb{Z}$, entonces R^n/M es de torsión ssi R^n/M es finito y, en este caso, $|R^n/M| = |\Delta|$.

b) Si R es el anillo de polinomios de un cuerpo F, entonces R^n/M es de torsión ssi R^n/M es e.v. de dimensión finita sobre F y, en este caso, $gr(\Delta) = dim_F R^n/M$

P2 Clasifique los grupos abelianos de orden n, para $n \in \{42,\ 200\}$.

P3 Sea K un cuerpo y M un $K[X]$-módulo. Demuestre que M es cíclico ssi los polinomios minimal y característico coinciden

P4 Sea K un cuerpo, $p \in K[X]$ y M un espacio vectorial. Suponga que $gr(p) \leq dim(M)$. Encuentre una transformación lineal $L : M \to M$ cuyo polinomio minimal sea p.

P5 Pruebe que en todo grupo abeliano finito existe un elemento cuyo orden es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos del grupo.

P6 Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿El $\mathbb{C}$-módulo asociado es cíclico? ¿Y el $\mathbb{R}$-módulo asociado? Responda lo mismo para $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Extra Sea n un entero positivo. Encuentre la solución general a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_0 y = 0,$$

para f definida en un intervalo abierto del eje real y n veces derivable.