MA3101. Elementos de Álgebra 2016.
Profesor: Martín Matamala
Profesores Auxiliares: José Palacios y Bastián Espinoza
Ayudante: Luis Peredo

Ejercicio 4

1. Sea I un ideal de un dominio R.

   a) Demuestre que $(R/I)[X] \cong R[X]/(I)$, donde (I) es el ideal generado por I en $R[X]$.

   b) Demuestre que si $(R/I)[X]$ es un DIP, entonces (I) es primo en $R[X]$. ¿Puede ser maximal?.

2. Para $n, p \in \mathbb{Z}$ con p primo tal que $n \notin (p)$, determine cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles y cuáles son primos en los dominios indicados

   a) $P = X^n - np$ en $\mathbb{Z}[X]$.

   b) $Q = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k X^k$ en $\mathbb{Z}[X]$.

   c) $Y^2 + QPY + P$ en $(\mathbb{Z}[X])[Y]$.

3. Sea R un anillo y M un R-módulo. Demuestre que para toda función R-lineal $f : M \to M$ tal que existe $k \in \mathbb{N}$ con $f^{k+1} = f$ se cumple que $M = \mathrm{ker} f \oplus f^k(M)$.