Clase Auxiliar #8: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
8 de noviembre de 2016

Resumen

Definición 1 *(Definición integral) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subseteq \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a,b] \to \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante*

$$\int_\Gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Teorema 1 *(Cauchy-Goursat) Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado, regular por trozos y simple Γ contenido en Ω.

Teorema 2 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo y consideremos $f : \Omega \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \Omega$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado, regular por trozos, simple y recorrido en sentido antihorario y sea D la región encerrada por Γ. Supongamos que $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escojamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que los discos cerrados $\bar{D}(p_j, \varepsilon)$ estén contenidos en D y no se intersecten entre sí. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)dz$$

Problemas

P1. Calcule la integral $\int_\Gamma |z|^2 dz$, donde Γ es el cuadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i.

P2. Calcule la siguiente integral impropia considerando $\beta > 0$:

$$\int\limits_0^\infty \exp(-x^2)\cos(2\beta x)dx,$$

<u>Indicación</u>: Considere el rectángulo de vértices $R, R+i\beta, -R, -R+i\beta$ y estudie el límite cuando $R \to \infty$.

P3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definamos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $h(z) = \int_0^1 f(t)cos(zt)dt$. El objetivo de este problema es demostrar que h es entera, es decir, es holomorfa en todo el plano complejo. Para ello proceda de la siguiente forma:

a) Expanda en serie de potencias la función $cos(tz)$.

b) Pruebe que $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$h(z) = \sum_{n\geq 0} \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 t^{2n} f(t)dt \right] z^{2n}$$

c) Muestre que $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|\int_0^1 t^{2n} f(t)dt| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

d) Concluya que h es holomorfa en todo el plano complejo.

e) Usando las partes anteriores, muestre que

$$h'(z) = -\int_0^1 tf(t)sin(zt)dt$$