Clase Auxiliar #10: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
24 de noviembre de 2016

Resumen

Teorema 1 *(Fórmula de Cauchy) Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *continua en* Ω *y holomorfa en* $\Omega \setminus \{p\}$. *Sea* $r > 0$ *tal que* $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. *Entonces, para todo* $z_0 \in D(p,r)$ *se tiene la formula integral de Cauchy:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

donde $\partial D(p,r)$ *es la circunferencia de centro* p *y de radio* r *recorrida en sentido antihorario.*

Teorema 2 *(Desigualdades de Cauchy) Sea* Ω *abierto,* $f \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ *y* $r > 0$ *tal que* $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. *Entonces*

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}, \text{ con } M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|$$

Problemas

P1. Si $f \in H(\mathbb{C})$ es una función acotada, entonces f es constante en $\mathbb{C}$.

P2. Si f es un polinomio no constante entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. En consecuencia, todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces.

P3. Sean a, $R > 0$ dos constantes positivas, consideremos $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomora en el disco $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a| < R\} \subset \Omega$. Suponga que f posee sólo un cero, $z_0 \in D(a,r)$. Pruebe que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,R)} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = z_0,$$

donde la integral está recorrida en sentido anti-horario.

Hint: Dadas las hipótesis sobre f, puede suponer que $f(z) = (z - z_0)\phi(z)$, con $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que $\phi(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$.

P4. Pruebe que

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\alpha^n}{n!} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} exp(2\alpha cos(\theta)) d\theta$$

Hint: Comience probando que $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\alpha^n exp(\alpha z)}{n! z^{n+1}} dz$