Clase Auxiliar #9: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
15 de noviembre de 2016

Resumen

Teorema 1 *(Cauchy-Goursat) Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado, regular por trozos y simple Γ contenido en Ω.

Teorema 2 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo y consideremos $f : \Omega \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \Omega$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado, regular por trozos, simple y recorrido en sentido antihorario y sea D la región encerrada por Γ. Supongamos que $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escojamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que los discos cerrados $\bar{D}(p_j, \varepsilon)$ estén contenidos en D y no se intersecten entre sí. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)dz$$

Problemas

P1. *a*) Determine el mayor conjunto donde $f(z) = z \cdot Re(z)^2$ es derivable en el sentido complejo.

b) Encuentre campos escalares u y v tales que $z^\alpha = u(x, y) + iv(x, y)$, con $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

c) Sea $a \in \mathbb{R}$, encuentre el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$, donde

$$c_k = \begin{cases} a + 1 & \text{si k es par} \\ 1 & \text{si k es impar} \end{cases}$$

Compruebe además que $\forall z \in D(0, R)$,

$$\sum_{k \geq 0} c_k z^k = \frac{a + 1 + z}{1 - z^2}$$

P2. Considere el polinomio

$$p(z) = (z + (1 + i))(z + (1 - i)).$$

El objetivo del problema es calcular el valor de

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)} dt$$

a) Muestre que

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z+(1+i)} + \frac{1}{z+(1-i)}$$

b) Para la curva Γ_R formada por los arcos regulares $L_R = [-iR, iR]$ y la semicircunferencia $S_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, Re(z) < 0\}$, muestre que

$$\int_{\Gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 4\pi i,$$

si R es suficientemente grande.

c) Muestre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1+i)} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1-i)} = i\pi$$

d) Usando los resultados anteriores encuentre el valor de I.

P3. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} \;:\; Re(z) > 0,\; Im(z) > 0\}$ y considere $f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\bar{D}$ y holomorfa en D. Suponga que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2},\; \forall z \in \bar{D}, |z| > 1.$$

a) Pruebe que $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ se tiene

$$\int_0^\infty f(x)dx = e^{i\theta} \int_0^\infty f(e^{i\theta}x)dx.$$

Indicación: Verifique en forma independiente los casos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Para $\theta \in (0, \pi/2)$ integre f sobre la curva dada por el contorno del sector circular de ángulo central θ y radio $R > 0$.

b) Use lo anterior con $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z)^2}$ y $\theta = \pi/2$ para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{cos(x)}{(1+x)^2} dx + \int_0^\infty \frac{e{-}x}{1+x^2} dx = 1$$