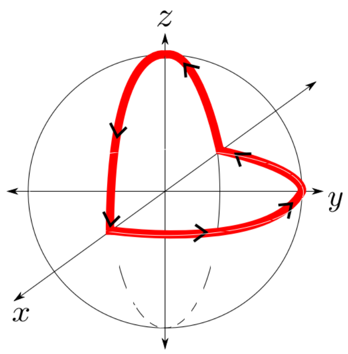
Clase Auxiliar #6: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
18 de octubre de 2016

P1. *a*) Calcule la circulación del campo $\vec{F} = (6zy^2 + cos^2(x), xzsin(xz) + 2x^3, xysin(xy) - 2x^3)$ a lo largo de la curva contenida en la superfie de la esfera unitaria, como indica la figura



b) Sea S la unión del casquete cilíndrico $x^2 + y^2 = 9$ para $-2 \leq z \leq 2$ con el casquete semiesférico $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ para $z \geq 2$. Bosqueje la superficie S. Calcule la integral de flujo

$$\iint_S (2yz\hat{j} - z^2\hat{k}) \cdot \hat{n} dA,$$

donde $\hat{n}$ es la normal exterior al cilíndro y a la semiesfera según corresponda. Indicación: Determine $rot(\vec{F})$ con $\vec{F} = yz^2\hat{i}$ y parametrice δS recorrida con orientación positiva con respecto al campo de normales $\vec{n}$.

P2. *a*) Sea $u : B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función clase C^2 en la bola abierta centrada en el origen $B(0,R)$. Suponga que u satisface $\Delta u = 0$ (es decir, es armónica) en $B(0,R)$.

1) Demuestre que el campo $\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{j}$ es conservarivo en $B(0,R)$.
2) Concluya que existe $v : B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica en $B(0,R)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

b) Sea $\vec{F} = (6abyz^3 - 20bx^3y^2)\hat{i} + (6abxz^3 - 10bx^4y)\hat{j} + (18abxyz^2 + ysin(yz) + 2z)\hat{k}$. Pruebe que es conservativo y determine el potencial asociado.

P3. *a*) Sea φ un campo escalar de clase C^2 y $\vec{G}$ un campo vectorial de clase C^1, ambos definidos en $\mathbb{R}^3$. Se define el campo $\vec{F}$ por $\vec{F} = \nabla\varphi + \mu\vec{\nabla} \times \vec{G}$, donde μ es una constante real. Demuestre que $div(\vec{F}) = \Delta\varphi$.

b) Sobre el cuadrado $T = \{(x, y, 0)|x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1]\}$ se encuentra una pila de arena húmeda cuya superficie superior S está descrita por $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$. El flujo de vapor de agua está dado por el campo $\vec{F}$ definido en (a), donde $\varphi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, $\mu = 1$, y $\vec{G}(x, y, z) = -ye^z\hat{i} + x^3 cos(z)\hat{j} + z sin(xy)\hat{k}$. Bosqueje la superficie S y obtenga el flujo de vapor que sale hacia arriba a través de la superficie S.