Clase Auxiliar #3: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
26 de septiembre de 2016

Resumen

Teorema 1 *(Gauss) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial clase C^1 sobre un abierto $\mathcal{U}$ que contiene a $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

P1. Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}.$$

a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y verifique que div($\vec{F}$)=0 sobre dicho dominio.

b) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera. Nota: puede usar el teorema de la divergencia utilizando un volumen adecuado. En tal caso tenga especial cuidado en verificar las hipótesis del teorema.

c) Interprete el resultado obtenido en *b*).

P2. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerza nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$, $\alpha > 0$.

a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico $r = a$ ($a > 0$) orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ (recuerde que $\Delta u = \operatorname{div}\nabla u$).

d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot\ d\vec{A} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U\ dV.$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

P3. Sean $\Omega \subset \Omega'$ dos abiertos acotados en $\mathbb{R}^3$. Suponga que $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos y sea $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \hat{n} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f, g \in C(\Omega', \mathbb{R})$ y $\hat{n}$ es la normal exterior a Ω. Pruebe que para todo $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dV = \iint_{\partial\Omega} vg \; dA - \iiint_\Omega vf \; dV.$$

Muestre que si $f(x, y, z) = 1/x$ y $g \equiv 0$ entonces

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \; dV = -\mathrm{Vol}(\Omega)$$

donde en este caso Ω no intersecta al plano YZ (de ecuación $x = 0$).