Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, jueves 13 de septiembre 2012.

Profesores:
M. Duarte,
A. Hernández.
Tiempo: 3:00 hrs.

Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

P1. Sea S el el hemisferio superior del casquete esférico centrado en $(1,1,0)$ y de radio 2. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = 2x\hat{\imath} - 2z\hat{k}$.

1. [2 ptos.] Considere el campo vectorial
$$\vec{G}(x,y,z) = yz\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + yx\hat{k}.$$
Compruebe que $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{G}$.

2. [2 ptos.] Use $\vec{G}$ junto al teorema de Stokes para calcular el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según la normal exterior.

3. [2 ptos.] Usando el teorema de la divergencia, calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según la normal exterior.

P2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el volumen de la Figura 1: el fondo es una región R del plano XY de borde C orientado en sentido antihorario, y su parte superior tiene la misma forma, está ubicado a una altura h y es paralelo al fondo, mientras que la parte lateral es paralelo al eje Z.

1. [2 ptos.] Aplique el teorema de Stokes al campo vectorial
$$\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$
sobre $C = \partial R$ y obtenga la relación
$$\int_C F_1\ dx + F_2\ dy = \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy,$$
que se conoce como teorema de Green.

2. [2 ptos.] Aplique el teorema de la divergencia al campo vectorial
$$\vec{G}(x,y) = (G_1(x,y), G_2(x,y))$$
sobre Ω y obtenga la relación
$$\int_C G_1\ dy - G_2\ dx = \int_R \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y}\right) dxdy,$$
que se conoce como el teorema de la divergencia en 2 dimensiones.

3. [2 ptos.] Muestre que el teorema de Green y el teorema de la divergencia en 2 dimensiones son equivalentes.

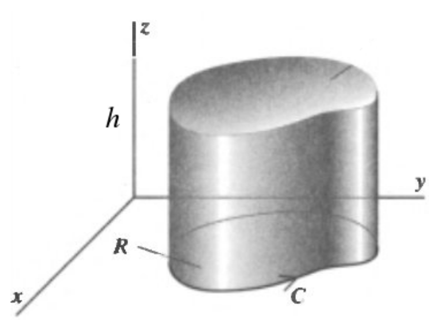

Figura 1: Región Ω

P3. Sea S la porción de paraboloide de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en coordenadas cilíndricas) que está delimitada por los planos $z = 0$ y $z = a$, con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}.$$

1. [1.5 ptos.] Compruebe que la normal exterior está dada por

$$\widehat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1 + 8\rho^2}}.$$

2. [1.5 ptos.] Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal exterior, directamente de la definición de integral de flujo.

3. [1.5 ptos.] Considere el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$. ¿Es posible aplicar el teorema de la divergencia a $\vec{F}$ en este dominio? Justifique su respuesta.

4. [1.5 ptos.] Utilice el teorema de la divergencia en un dominio adecuado para calcular el flujo de $\vec{F}$ a través del manto del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, 0 < z < a\}$.

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, jueves 13 de septiembre 2012.

Profesores:
M. Duarte,
A. Hernández.
Tiempo: 3:00 hrs.

Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones - Pauta

P1.

1. Calculando directamente

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{G}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & -xz & yx \end{vmatrix} &= 2x\hat{\imath} + (-y+y)\hat{\jmath} + (-z-z)\hat{k} \\ &= 2x\hat{\imath} - 2z\hat{k} \\ &= \vec{F}(x,y,z)\end{aligned}$$

[2,0]

2. $\Gamma = \partial S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4,\ z = 0\big\}$. El campo $\vec{G}$ es de clase C^1, luego para usar el teorema de Stokes basta orientar Γ en el sentido antihorario.
Según el teorema de Stokes:

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_S \operatorname{rot}\vec{G} \cdot \hat{n} dA = \int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

[0,8]

Parametrización de Γ: $\vec{\gamma}(\theta) = (2\cos\theta + 1, 2\sin\theta + 1, 0)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Se tiene $\vec{\gamma}'(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$ [0,7]

Finalmente

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \Big((2\sin\theta + 1)\cdot 0, (-2\cos\theta + 1)\cdot 0, (2\cos\theta + 1)(2\sin\theta + 1)\Big) \cdot \Big(-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0\Big)\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(0, 0, (2\cos\theta + 1)(2\operatorname{sen}\theta + 1)\Big)\Big(-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0\Big)\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 0\ d\theta = 0.\end{aligned}$$

[0,5]

3. Para usar el teorema de Gauss necesitamos "cerrar" la superficie S, para ello consideremos $T = D\big((1,1,0),2\big) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4,\ z = 0\big\}$ (tb. puede ser definido cerrado, cambiando $<$ por $\leq$). Sea Ω la región sólida encerrada por $S \cup T$, luego como $\vec{F}$ es de clase C^1,

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\ dV = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \int_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

[0,8]

Como $\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{G} = 0$, luego

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = -\int_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

[0,2] La normal exterior a Ω en T es $\hat{n} = -\hat{k}$. También se puede calcular parametrizando, cuidando que la orientación del borde de T sea en sentido horario para ser consistente con la dirección exterior a Ω:

$$\begin{aligned}\vec{\phi}(r,\theta) &= (1 + r\cos\theta, 1 - r\operatorname{sen}\theta, 0) \qquad r \in [0,2),\ \theta \in [0,2\pi), \\ \partial_r\vec{\phi}(r,\theta) &= (\cos\theta, -\sin\theta, 0), \\ \partial_\theta\vec{\phi}(r,\theta) &= (-r\operatorname{sen}\theta, -r\cos\theta, 0),\end{aligned}$$

lo que da $\left(\partial_r\vec{\phi} \times \partial_\theta\vec{\phi}\right)(r,\theta) = (0,0,-r)$. N.d.P. Basta decir $\hat{n} = -\hat{k}$. [0,3]

Luego

$$-\int_T \vec{F}\cdot \hat{n}dA = -\int_0^2\int_0^{2\pi} (2(1+r\cos\theta),0,-2\cdot 0)\cdot(0,0,-1)\,rdrd\theta = 0.$$

[0,2]

P2.

1. Sea $\vec{F_0}(x,y,z) = (F_1(x,y),F_2(x,y),0)$. Se tiene que $\vec{F_0}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ y claramente la restricción de $\vec{F_0}$ a $\mathbb{R}^2$ es $\vec{F}$.
   Parametrización de R: $\vec{\phi}(x,y) = (x,y,0)$ con $(x,y)\in R$. Normal a R: $\hat{n}=\hat{k}$. [0,2]
   Según Stokes
   $$I_1 = \int_R \operatorname{rot}\vec{F_0}\cdot\hat{n}dA = \int_C \vec{F_0}\cdot d\vec{r} = I_2$$
   [0,6]
   Pero $\operatorname{rot}\vec{F_0} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0,0,\dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)$ [0,2]
   Luego,
   $$\begin{aligned} I_1 &= \int_R \left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\cdot(0,0,1)dxdy \\ &= \int_R \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\;dxdy. \end{aligned}$$
   [0,3]
   Por otro lado notemos que C no tiene componente en $\hat{k}$ pues $C\subseteq$ plano XY, luego $d\vec{r}=(dx,dy,0)$ [0,3]
   Luego,
   $$\begin{aligned} I_2 &= \int_C (F_1(x,y),F_2(x,y),0)\cdot(dx,dy,0) \\ &= \int_C F_1dx+F_2dy. \end{aligned}$$
   [0,4]

2. Según el teorema de la divergencia:
   $$I_1 = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{G}_0 dV = \int_{\partial\Omega}\vec{G}_0\cdot\hat{n}dA = I_2,$$
   donde $\vec{G}_0(x,y,z) = (G_1(x,y),G_2(x,y),0)$. [0,4]
   Tenemos
   $$\operatorname{div}\vec{G}_0 = \frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}.$$
   [0,3]
   Entonces
   $$I_1 = \int_\Omega \frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}\;dxdydz = \int_0^h\int_R \frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}\;dxdydz = h\int_R \frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}\;dxdy.$$
   [0,3]
   Por otro lado $\partial\Omega = R\cup M\cup T$ donde M es el manto de Ω y T es la tapa superior. Tenemos que $\hat{n}_R=-\hat{k}$, $\hat{n}_T=\hat{k}$, luego
   $$I_2 = \int_{\partial\Omega}\vec{G}_0\cdot\hat{n}dA = \int_R \vec{G}_0\cdot\hat{n}_RdA + \int_T\vec{G}_0\cdot\hat{n}_TdA + \int_M\vec{G}_0\cdot\hat{n}_MdA$$
   [0,1]

$$\int_R \vec{G}_0 \cdot \hat{n}_R dA = \int_R (G_1(x,y), G_2(x,y), 0) \cdot (0,0,-1) dxdy = 0.$$

[0,1]

Una parametrización de T está dada por $\vec{\phi}_T(x,y) = (x,y,h)$ con $(x,y) \in R$, luego

$$\int_T \vec{G}_0 \cdot \hat{n}_T dA = \int_R (G_1(x,y), G_2(x,y), 0) \cdot (0,0,1) dxdy = 0.$$

[0,1]

Hallamos una parametrización del manto M. Consideremos una parametrización $\vec{\gamma}(t)$ de la curva C, con orientación antihoraria. Tenemos que $\vec{\gamma}(t)$ es de la forma:

$$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)\,, \qquad t \in [a,b],$$

luego

$$\vec{\phi}_M(t,z) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), z)\,, \qquad t \in [a,b],\ z \in [0,h],$$

parametriza el manto M. [0,2]

Para calcular la normal:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{\phi}_M(t,z) &= (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), 0) \\ \partial_z \vec{\phi}_M(t,z) &= (0,0,1) \\ \partial_t \vec{\phi} \times \partial_z \vec{\phi}(t,z) &= (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t), 0) \end{aligned}$$

[0,2]

Luego $\hat{n} = \dfrac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t), 0)}{\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}}$ corresponde a la normal exterior de M. Así

$$\begin{aligned} \int_M \vec{G}_0 \cdot \hat{n}_M dA &= \int_a^b \int_0^h (G_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), G_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), 0) \cdot (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t), 0)\ dtdz \\ &= h \left[\int_a^b G_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt - \int_a^b G_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt \right] \\ &= h \int_C G_1 dy - G_2 dx. \end{aligned}$$

[0,2]

Como $I_1 = I_2$, tenemos

$$h \int_R \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y}\ dxdy = h \int_C G_1 dy - G_2 dx,$$

y dividiendo la igualdad por h se tiene lo que buscábamos. [0,1]

3. Sea $\vec{F} = (-G_2, G_1)$, al aplicar el teorema de Green a $\vec{F}$ se obtiene el teorema de la divergencia en 2 dimensiones. [1,0]

   Sea $\vec{G} = (F_2, -F_1)$, al aplicar el teorema de la divergencia en 2 dimensiones se obtiene el teorema de Green. [1,0]

P3.

1. Usamos coordenadas polares. Del enunciado tenemos que $z = \rho^2 - 1$, luego tenemos que una parametrización de S está dada por

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \left(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \rho^2 - 1\right),$$

   con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\rho = \sqrt{1+z} \in (1, \sqrt{1+a})$ pues $0 < z < a$. [0,5]

   La normal exterior se obtiene de normalizar el vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}$ y de comprobar que la dirección es efectivamente exterior. Calculando:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-\rho \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0) \qquad\qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2\rho)$$

Entonces, el producto cruz es

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\rho \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2\rho \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2\rho^2\cos\theta - 0 \\ 0 - -2\rho^2 \operatorname{sen}\theta \\ -\rho \operatorname{sen}^2\theta - \rho\cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\rho^2\cos\theta \\ 2\rho^2\operatorname{sen}\theta \\ -\rho \end{pmatrix} = 2\rho^2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = 2\rho^2 \hat{\rho} - \rho \hat{k}.$$

[0,5]

Calculamos ahora la norma,

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| = \rho\sqrt{1+8\rho^2}$$

Luego,

$$\hat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1+8\rho^2}}.$$

Observar que $\hat{n} \cdot \hat{\rho} > 0$, lo que dice que $\hat{n}$ apunta en la dirección exterior. [0,5]

2. Dado que el trío $\left(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k}\right)$ es ortogonal tenemos que $\vec{F} \cdot \hat{\rho} = \rho^{-1}$ y $\vec{F} \cdot \hat{k} = 0$.

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{2\rho \vec{F} \cdot \hat{\rho} - \vec{F} \cdot \hat{k}}{\sqrt{1+8\rho^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+8\rho^2}}.$$

[0,5]

Entonces, por definición,

$$\begin{aligned} \int\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+a}} \vec{F}(\rho, \theta, z) \cdot \hat{n} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+a}} \frac{2}{\sqrt{1+8\rho^2}}\, \rho\sqrt{1+8\rho^2} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+a}} 2\rho\, d\rho d\theta \\ &= 2\pi a. \end{aligned}$$

[1,0]

3. [1.5 ptos.] No es posible dado que el campo $\vec{F}$ no es diferenciable cuando $\rho = 0$, es decir en todo el eje Z, y el dominio descrito en esta pregunta contiene parte del eje Z. [1,5]

4. [1.5 ptos.] Para aplicar el teorema de la divergencia, necesitamos que el dominio no intersecte al eje Z. Para aprovechar el cálculo hecho en la parte 2, proponemos el siguiente dominio Ω delimitado por S, el cilindro C, y el anillo $R = \{1 < x^2 + y^2 < 1 + a\}$, como es descrito por la siguiente figura:

Usar este u otro dominio similar [0,5]

Notar que Ω no interseca al eje Z, que $\partial\Omega$ es la unión disjunta de S, C y el anillo R que tampoco intersecan a Ω. El teorema de la divergencia entonces vale en Ω. Calculando en coordenadas cilíndricas,

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial (F_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = 0.$$

[0,2]

Usando el teorema de la divergencia:

$$\int\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \int\int_C \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \int\int_R \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{F}) dV = 0.$$

[0,3]

La normal en R corresponde a $\hat{k}$, y es claro que $\vec{F} \cdot \hat{k} = 0$. La normal exterior a Ω en el manto cilíndrico C es $\hat{n} = -\hat{\rho}$,

[0,2]

luego

$$\int\int_C \vec{F} \cdot \hat{\rho} dA = \int\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = 2\pi a,$$

por el cálculo de la parte 2. [0,3]