MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Raúl Gormaz A.
Auxiliares: Hugo Carrillo L. - Nicolás Godoy M.
Semestre Primavera 2013

Guía de preparación Control 1
Integrales de flujo y Teorema de Gauss

1. Integrales de flujo

Definición: Dada la superficie S parametrizada en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ por $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(u, v)$ y el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido, al menos, sobre S, se define el flujo de $\vec{F}$ sobre S como la siguiente integral:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right) du\, dv$$

Usando las propiedades del producto escalar y definiendo como vector normal unitario:

$$\hat{n} := \frac{\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}$$

La integral de la definición puede escribirse como

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(\vec{F} \cdot \hat{n} \right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

P1. Calcule el flujo del campo $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$G(x, y, z) = e^{-z^2} \hat{e}_1 + x^2 \hat{e}_2 + 2z \hat{e}_3$$

a través de la superficie del cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ delimitada por los planos $x = 0$, $x = 2$, $z = 0$ y $z = 1$.

P2. Calcule

$$\iint_A \vec{R} \cdot d\vec{S}$$

donde

$$\vec{R}(x, y, z) = \left(-xz,\, -yz,\, z^2 \right)$$

y A es la superficie del cono $z^2 = x^2 + y^2$ delimitada por $z = 1$ y $z = 4$.

2. Teorema de Gauss

Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido y C^1, a lo menos, en la adherencia de un conjunto abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea S una superficie orientable, de clase C^1 y tal que $S = \delta\Omega$. Entonces se cumple que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

P3. Calcule el flujo de $\vec{F} = e^{y+z} \hat{e}_1 + \operatorname{sen}(z^2) \hat{e}_2 + x^3 \hat{e}_3$ a través de la superficie de la esfera unitaria con centro en el origen.

P4. Calcule

$$\iint_S \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

donde

$$\vec{H}(x, y, z) = \operatorname{sen}^3(y+z)\hat{e}_1 + e^{x^2-z}\hat{e}_2 + y^2\hat{e}_3$$

y

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 3\right\}$$

P5. Encuentre el flujo saliente del campo vectorial

$$\vec{L}(x, y, z) = (x, y, 0)$$

sobre la semiesfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

P6. Compruebe el teorema de Gauss para el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = 4x\hat{e}_1 + 4y\hat{e}_2 + 4z\hat{e}_3$$

Utilizando como superficie de integración el manto de la esfera de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad = \quad 16$$

P7. Calcule

$$\iint_D \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

donde D es la cara externa del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ comprendida entre $z = 3$ y $z = -3$ y

$$\vec{E}(x, y, z) = (yz^2, 3e^x z^2, z)$$

P8. Calcule el flujo total del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}x^3 + e^z\right)\hat{e}_1 + \left(\operatorname{sen}(x) + yz^2\right)\hat{e}_2 + zy^2\hat{e}_3$$

a través de la esfera de radio a y centro en el origen.