MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Raúl Gormaz A.
Auxiliares: Hugo Carrillo L. - Nicolás Godoy M.
Semestre Primavera 2013

Guía de preparación Control 1
Integrales sobre curvas y campos conservativos

1. Integrales sobre curvas

1.1. Nociones sobre curvas

Definición Sea llamará curva $\mathcal{C}$ a la imagen del intervalo $[a, b]$ bajo una función continua $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, $\gamma : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (t^2, e^{-t}, \cos(4t))$ es una curva en el espacio y $\sigma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\sigma(t) = (t^4, 2t - 1)$ es una curva en el plano.

Obs A veces, al decir "curva", nos referimos indistintamente al conjunto de puntos que ésta toma o a la función que la define. Una curva $(\mathcal{C}, \gamma)$ se dira:

- Simple si γ es inyectiva. Es decir, la curva $\mathcal{C}$ no se corta a si misma.
- Cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$, es decir la curva $\mathcal{C}$ parte y termina en el mismo lugar.
- Cerrada simple si es cerrada en $[a, b]$ y simple en $[a, b)$ es decir, la curva $\mathcal{C}$ solo se corta en sus extremos.
- Regular a trozos si $\gamma'(t)$ es acotada y continua en $[a, b]$, salvo un número finito de puntos.

Parametrizar una curva $\mathcal{C}$ consiste en encontrar una función γ que la genere. Esta función no es única por lo que la determinación de la más adecuada dependerá de la experticia que se gane haciendo ejercicios, y del problema a resolver.

1.2. Integrales de trayectoria

Definición: Sea $\vec{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función que define una curva simple (o cerrada simple) y regular $\mathcal{C}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar definido, a lo menos, en $\vec{\gamma}([a, b])$ y tal que $f(\vec{\gamma}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$ sea continuo en $[a, b]$. Se define la integral de trayectoria de f a lo largo de $\mathcal{C}$ como:

$$\int_{\mathcal{C}} f\, dl := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \left\| \vec{\gamma}'(t) \right\| dt$$

Si las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = \gamma_3(t) \end{cases}$$

Entonces la expresión anterior adopta la forma

$$\int_{\mathcal{C}} f\, dl := \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)}\, dt$$

Obs

- Cuando la curva $\mathcal{C}$ es regular a trozos, o cuando $f(\vec{\gamma}(t))$ sea continua a trozos, la integral se separa en partes para cada una de las cuales $f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\|$ sea continua, y se suman.
- Si $f(x, y, z) = 1$, la integral de trayectoria de f nos proporciona la longitud de la curva $\mathcal{C}$ comprendida entre los puntos $\vec{\gamma}(a)$ y $\vec{\gamma}(b)$.

- Si $f(x, y, z)$ representa la densidad puntual de un alambre, entonces la integral de trayectoria de f nos da la masa de la porción de alambre correspondiente al arco de curva comprendido entre $\vec{\gamma}(a)$ y $\vec{\gamma}(b)$.
- Si $\mathcal{C}$ es una curva plana y f es una función real de dos variables reales, entonces la integral de trayectoria tiene una curiosa aplicación en la vida real: representa el área de una pared cuyo suelo viene dado por $\mathcal{C}$ y la altura en cada punto, por el valor de f.
- Si la curva es cerrada simple la integral se denota por $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} f\, dl$.

P1. Sea $\vec{\sigma} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{\sigma}(t) = (t, 2t, -t)$ la curva que define un alambre en el espacio. Si $f(x, y, z) = xy + z$ es la densidad puntual del alambre en el punto (x, y, z), determine su masa total.

P2. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ donde $\mathcal{C}$ es la curva generada por $\vec{\gamma}(t) = (\ln(t), t, \sqrt{8t})$ entre 0 y 3, y f el campo escalar definido por $f(x, y, z) = e^x + y + z^2$.

P3. Encuentre el largo de la curva de ecuación $\vec{c}(t) = (\text{sen}(t), \cos(t), t^2)$ con $t \in [0, \pi]$.

P4. Calcule la masa del arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, si su densidad es proporcional a su distancia al origen de coordenadas. El resultado quedará en función de la constante de proporcionalidad.

P5. A usted le regalan para su cumpleaños una torta perfectamente esférica de 10 cm de radio. Mientras la torta está quieta, su madre realiza un corte paralelo a la mesa en la que se encuentra, a 6 cm de altura. Como usted quiere decorar el borde circunferencial de la torta que quedó en la mesa, calcule el largo de este borde usando una integral de trayectoria. Compárelo con el valor que obtuvo su hermano pequeño usando la fórmula $2\pi r$.

P6. Calcule la masa del arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional (con constante k) a su distancia al origen de coordenadas.

1.3. Integrales de línea

Definición: Sea $\vec{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la función que define una curva simple (o cerrada simple) y regular $\mathcal{C}$ y sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido y continuo, a lo menos, en $\vec{\gamma}([a, b])$ y tal que $\vec{F} = F_1(x, y, z)\hat{e}_1 + F_2(x, y, z)\hat{e}_2 + F_3(x, y, z)\hat{e}_3$. Se define la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de $\mathcal{C}$ como la siguiente integral de trayectoria:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{dl} := \int_a^b (\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t))\, dt$$

Si las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$\begin{cases} x &= \gamma_1(t) \\ y &= \gamma_2(t) \\ z &= \gamma_3(t) \end{cases}$$

Entonces la expresión anterior adopta la forma

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_a^b F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\, \gamma_1'\, dt + F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\, \gamma_2'\, dt + F_3(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\, \gamma_3'\, dt$$

La cual en ocasiones es denotada como:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_a^b F_1(x, y, z)\, dx + F_2(x, y, z)\, dy + F_3(x, y, z)\, dz$$

Obs

- La integral de línea puede interpretarse como una integral de trayectoria, donde el campo escalar a considerar es la componente del campo $\vec{F}$ que es tangencial a la curva.
- Cuando la curva $\mathcal{C}$ es regular a trozos, o cuando $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))$ sea continua a trozos, la integral se separa en partes para cada una de las cuales $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}'(t)\|$ sea continua, y se suman.
- El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ se define como la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{dl}$. Es por esto que las integrales de línea son también conocidas como integrales de trabajo.

P7. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{G}(x,y,z) = (-y,x,z)$ a lo largo de la hélice parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, recorrida en sentido positivo.

P8. Calcule la integral de línea

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{G}\cdot\vec{dl}$$

Siendo $\vec{G}(x,y,z) = x^2\hat{e}_1 + 2xy\hat{e}_2 + xz^2\hat{e}_3$ y $\mathcal{C}$ la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (t, t+1, t^2)$ con $t \in [-2, 3]$, recorrida en sentido positivo.

P9. Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

Donde $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{e}_1 + xy\hat{e}_2 + xyz\hat{e}_3$ y $\mathcal{C}$ es la curva formada por la unión de:

(a) El segmento de recta que une el origen con el punto $(1,1,1)$.
(b) El segmento de recta que une el punto $(1,1,1)$ con $(0,0,1)$.
(c) El segmento de recta que une el punto $(0,0,1)$ con el origen.

P10. Calcule

$$\int_{\Gamma} \vec{G}\cdot\vec{dl}$$

Donde $\vec{G}(x,y,z) = e^x\hat{e}_1 + e^{x+y}\hat{e}_2 + \operatorname{sen}(\pi z)\hat{e}_3$ y Γ es la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (t, -t, 2t)$ con $t \in [0,1]$ recorrida en sentido positivo.

P11. Calcule el trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{H}(x,y,z) = e^y\hat{e}_1 - z\hat{e}_2 + y\hat{e}_3$$

Sobre la curva cerrada formada por la unión de los segmentos definidos en a) y b).

(a) El arco de circunferencia que une el punto $(0,1,0)$ con $(0,-1,0)$ y que pasa por $(0,0,1)$.
(b) El segmento de recta que une el punto $(0,-1,0)$ con el $(0,1,0)$.

2. Campos conservativos

Sería deseable que la integral de línea

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

no dependiera de $\mathcal{C}$, es decir, que fuera independiente del camino elegido para llegar desde $\vec{\gamma}(a)$ a $\vec{\gamma}(b)$, pues en estas condiciones el valor de la integral solo dependería de los puntos inicial y final, y no de la curva que los conectase. Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se dice conservativo si existe $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\vec{F} = \nabla f$. En este caso f es llamado un potencial de $\vec{F}$.

Un par de resultados y caracterizaciones importantes de los campos conservativos son los siguientes:

- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto estrellado y $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^1. Entonces

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \text{ en } \Omega$$

- Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \text{ en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

- Sea Ω un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \Gamma \text{ curva cerrada y regular por pedazos se tiene que } \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Sea D un conjunto simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo vectorial C^1 en D tal que $\vec{F} = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2$. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

- Sea Ω un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \Gamma_1,\, \Gamma_2 \text{ curvas regulares se tiene que } \oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial conservativo en Ω. Entonces, si $\mathcal{C}$ es una curva que une los puntos $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_f$:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \;=\; \varphi(\vec{x}_f) - \varphi(\vec{x}_i)$$

  donde $\nabla\varphi = \vec{F}$, es decir, φ es un potencial de $\vec{F}$.

Vale la pena recordar que:

- Un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice estrellado si existe $\vec{r}_0 \in D$ tal que $\forall \vec{r} \in D$:

$$[\vec{r}_0, \vec{r}] := \{\lambda\vec{r}_0 + (1-\lambda)\vec{r} \,/\, \lambda \in [0,1]\} \subseteq D$$

- Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice simplemente conexo si el interior de toda curva cerrada simple contenida en A, también está contenida en A.

P12. Determine si el campo vectorial $\vec{H} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\vec{H}(x,y,z) = e^x y^2 \hat{e}_1 + 2e^x y \hat{e}_2$ es conservativo y determine su potencial si corresponde.

P13. Calcule el trabajo realizado por la fuerza

$$G(x,y,z) = e^{x+y^2}\hat{e}_1 + 2ye^{x+y^2}\hat{e}_2$$

sobre el segmento de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ que une el punto $(1,0)$ con el $(-1,0)$, recorrido en sentido horario.

P14. Determine si el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x, y^2, z^3)$ es conservativo. En caso afirmativo, obtenga el potencial.

P15. Determine si el campo vectorial $\vec{G} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\vec{G}(x,y) = \big(\text{sen}(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2),\, 2xy\cos(x^2+y^2)\big)$$

es conservativo. En caso afirmativo, encuentre el potencial.

P16. Calcule

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

donde $\vec{E}(x,y,z) = (2x, e^{y+z}, e^{y+z})$ y $\mathcal{C}$ es el segmento de la curva

$$\begin{cases} z &= x^2 + 2y^2 \\ y &= z \end{cases}$$

que une el origen con el punto $(2,2,12)$, recorrido en sentido horario.

P17. Calcule:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

donde $\vec{F}(x,y) = (2x+y, x+2y)$ y Γ es la parte de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que une el punto $(a,0)$ con el $(-a,0)$, recorrida en sentido horario.

P18. Determine si el campo vectorial $\vec{J} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\vec{J}(x,y,z) = 2x(y^2+z^2)\hat{e}_1 + 2y(x^2+z^2)\hat{e}_2 + 2z(x^2+y^2)\hat{e}_3$$

es conservativo. En caso afirmativo, encuentre su potencial.

P19. Calcule el trabajo realizado por $\vec{G}(x,y,z) = (\cos(x+y+z), \cos(x+y+z)+z^2, \cos(x+y+z)+2yz)$, desde el punto $(a,0,0)$ hasta el punto $(a,0,2\pi)$ a lo largo de la curva:

$$\begin{cases} x &= a\cos(t) \\ y &= a\,\mathrm{sen}(t) \\ z &= t \end{cases}$$

recorrida en sentido horario.