Fecha: / /

Solución Auxiliar 14

P1 Fórmula integral de Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

a) Sea $f(z) = e^{az}$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy para $z_0 = 0$, $n = 0$; $\Gamma = C$:

$$f^{(0)}(0) = \frac{0!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^{0+1}} dz$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^0}_{1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{az}}{z} dz \Rightarrow 2\pi i = \oint_C \frac{e^{az}}{z} dz$$

//

b) Sea $f(z) = \tan(z/2)$. Luego, las singularidades de f son los ceros de $\cos(z/2)$, lo cual ocurre si $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Pero todas estas singularidades están fuera del cuadrado! por lo que f es holomorfa en el interior de Γ.

Como x_0 está dentro de Γ (pues $-2 < x_0 < 2$), aplicando la fórmula de Cauchy, con $z_0 = x_0$, $n = 1$:

$$f'(x_0) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz$$

Fecha: / /

Luego, $f'(x_0) = \frac{1}{2}\sec^2(x_0/2)$, y así:

$$\frac{1}{2}\sec^2(x_0/2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}\,dz$$

$$\therefore \oint_\Gamma \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}\,dz = i\pi\sec^2(x_0/2)$$

P2 [Teo Residuos: $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, p_k)$, p_k: polos de f]

a) Integrar de 0 a 2π nos sugiere que apaña convertir esta integral, en una compleja sobre C, el círculo unitario, orientado positivamente. Esto es:

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz},\ \theta\in[0,2\pi]$$

Además: $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{(z-1/z)}{2i}$. Así:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-3\operatorname{sen}(\theta)} = \oint_C \frac{dz}{iz\left(5-3\left(\frac{z-1/z}{2i}\right)\right)} = \oint_C \frac{dz}{\cancel{i}z\left(\frac{10i-3z+3/z}{2\cancel{i}}\right)}$$

$= \oint_C \frac{(-2)\,dz}{(3z^2-10iz-3)}$. Aplicaremos teo. residuos en $f(z) = \frac{-2}{(3z^2-10iz-3)}$

Polos: $z_{1,2} = \frac{10i \pm \sqrt{-100+36}}{6} = \frac{10i \pm 8i}{6} \Rightarrow z_1 = 3i$,

$z_2 = \frac{i}{3}$, ambos simples.

Como tomamos el círculo unitario, sólo encerramos z_2.

RHEIN

Fecha: / /

Luego: $\operatorname{Res}(f, i/3) = \lim_{z \to i/3} (z - i/3) \dfrac{(-2)}{(3z^2 - 10iz - 3)}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{z \to i/3} \frac{(-2)}{(6z - 10i)} = \frac{-2}{2i - 10i} = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}.$$

Así, por teo. Residuos:

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{-i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\operatorname{sen}(\theta)} = \pi/2 \quad //$$

b) Polos de $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{(z^2 - 5z + 4)^3}$:

Notemos que $f(z) = \dfrac{(z+1)(z-1)}{(z-1)^3 (z-4)^3}$

$\Rightarrow$ Los polos de f son $z_1 = 1$ y $z_2 = 4 \Rightarrow$ ambos rodeados por C.

Notemos que z_1 es de orden 2, pues:

$$\lim_{z \to 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{(z+1)}{(z-4)^3} = \frac{2}{-27} \text{ (lím. existe)}.$$

y $z_2 = 4$ es claramente de orden 3.

Calculemos entonces los residuos para cada polo:

Fecha: / /

$$\cdot \operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{(z-4)^3}\right) = \lim_{z\to z_1}\left(\frac{(z-4)^3 - 3(z-4)^2(z+1)}{(z-4)^6}\right)$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left(\frac{(z-4)-3(z+1)}{(z-4)^4}\right) = \lim_{z\to z_1} \frac{-2z-7}{(z-4)^4}$$

$$= -\frac{(2z_1+7)}{(z_1-4)^4} \overset{z_1=1}{=} \frac{-9}{81} = \frac{-1}{9}.$$

$$\cdot \operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{2} \lim_{z\to z_2} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z+1}{(z-1)^2}\right)$$

Notemos que $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z+1}{(z-1)^2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^2 - (z+1)\cdot 2(z-1)}{(z-1)^4}\right)$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)-2(z+1)}{(z-1)^3}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{-z-3}{(z-1)^3}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{z+3}{(z-1)^3}\right)$$

$$= -\left(\frac{(z-1)^3 - 3(z-1)^2(z+3)}{(z-1)^6}\right) = -\left(\frac{(z-1)-3(z+3)}{(z-1)^4}\right)$$

$$= -\left(\frac{-2z-10}{(z-1)^4}\right) = \frac{2z+10}{(z-1)^4} = \frac{2(z+5)}{(z-1)^4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \frac{(z_2+5)}{(z_2-1)^4} \overset{z_2=4}{=} \frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$$

∴ Por fórmula de residuos:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 0.$$

RHEIN

Fecha: / /

P3

- Serie de Fourier de f (en $(-l,l)$):

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \; ; \; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

- Identidad de Parseval:

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \; f \in \mathcal{C}^1,$$

a) $\cdot\, l = \pi$

Primero, notemos que f es par, por lo que su serie asociada será:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (\text{i.e., } b_n = 0).$$

Luego: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi}(2\pi^3)$

$= \frac{2}{3}\pi^2.$

$u = x^2,\ du = 2x\,dx,\ dv = \cos(nx),\ v = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}.2x\,d\right.$$

$u = 2x \ldots$

Donde: $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}2x\,dx = \frac{-2x\cos(nx)}{n^2} + 2\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx}^{\,0}$

RHEIN

Fecha: / /

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{2\pi\cos(n(-\pi))}{n^2}\right)$$

$$= \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$\therefore$ la serie es $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

Como la función es continua en $\mathbb{R}$, $f(x) = S_f(x)$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

b). Reemplazando lo anterior con $x=\pi$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^2}{3} = \overset{2}{\cancel{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

RHEIN

Fecha: / /

- Como $f(-\pi) = f(\pi)$ y f es $\mathcal{C}^1$ por trozos, podemos usar la identidad de Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2\,dx \overset{b_n=0}{=} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\cdot 1}{n^4}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi^5}{5}\right) = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

$$\Rightarrow 2\pi^4\left(\frac{4}{45}\right) = \cancel{16}\,8\,2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

//

RHEIN