Fecha: / /

Solución Auxiliar 12

Resumen:

- Dado f, $p \in \mathbb{C}$ es punto singular aislado de f si $\exists R > 0$ tq $f \in H(B(p,R) \setminus \{p\})$, pero f no es holomorfa en p.

- p es evitable si existe $\lim_{z \to p} f(z)$

- p es polo si es punto singular de f y $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ tq existe $\lim_{z \to p} (z-p)^m f(z)$

m: orden del polo p. Si $m=1 \Rightarrow$ p es "polo simple".

- Serie de Laurent: $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

- Si f se representa por una serie de Laurent en torno a un polo p, definimos:

$$\text{Res}(f,p) = a_{-1}$$

- Si p es polo de orden m

$$\Rightarrow \text{Res}(f,p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p)^m f(z)]$$

- Teo Residuos: $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}(f,p_k)$

- Teo: Sea f meromorfa. Si:
  i) f no tiene polos en $\mathbb{R}$
  ii) f tiene una cantidad finita de polos (digamos, n)
  iii) $\exists K, M \geq 0$, $m > 1$ tq $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^m}$, $\forall |z| \geq M$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f,p_k)$$

Fecha: / /

Prop: p, q polinomios primos entre sí tq q no tiene ceros reales y además:

$$gr(q) \geq gr(p) + 2$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{q(z)=0 \\ Im(z)>0}} Res\left(\frac{p}{q}, z\right) + \pi i \sum_{\substack{q(a)=0 \\ a\in\mathbb{R}}} Res\left(\frac{p}{q}, a\right)$$

P1 Queremos usar el teo. Residuos, por lo que intentaremos calcular las integrales reales a partir de integrales complejas.

Consideremos $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, la curva de integración será la circunferencia unitaria. Además, notemos que:

- $z^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)$, y
- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z + 1/z}{2}$

Por lo que intentaremos calcular

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)}{a - \cos(n\theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{i\theta}}{2a - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})}\,d\theta$$

Luego simplemente igualaremos partes real e imaginaria para concluir.

$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = i\underbrace{e^{i\theta}}_{z}\,d\theta$

Tenemos: $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{i\theta}}{2a - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})}\,d\theta = 2 \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{2a - (z + 1/z)}\,\frac{dz}{iz}$

$$= 2i \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 - 2az + 1}\,dz$$

RHEIN

Fecha: / /

Consideremos entonces $f(z) = \dfrac{z^m}{z^2-2az+1}$

Polos de f:

$$z^2 - 2az + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2-4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$$

ie, $p_1 = a + \sqrt{a^2-1}$, $p_2 = a - \sqrt{a^2-1}$, ambos polos son simples.

Notemos que, como estamos integrando sobre la circunferencia unitaria, y $a > 1$,
$\Rightarrow |p_1| > 1$, es decir, p_1 no está encerrado por el contorno de integración, por lo que no lo consideraremos.

Luego, por teo. residuos: $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^m}{z^2-2az+1}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, p_2)$

Cálculo del residuo: (con $m=1$)

$$\operatorname{Res}(f,p_2) = \lim_{z\to p_2} \frac{1}{\cancel{0!}} \cdot \frac{\cancel{d^0}}{\cancel{dz^0}}\left((z-p_2)f(z)\right)$$

notando que $z^2-2az+1 = (z-p_1)(z-p_2)$ (pues p_1, p_2 son las raíces del polin.

$$= \lim_{z\to p_2} \cancel{(z-p_2)} \frac{z^m}{(z-p_1)\cancel{(z-p_2)}}$$

$$= \frac{p_2^m}{p_2 - p_1} = \frac{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^m}{-2\sqrt{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{z^m}{z^2-2az+1}\,dz = \cancel{2}\pi i \left(\frac{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^m}{-\cancel{2}\sqrt{a^2-1}}\right) = -\frac{\pi i \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^m}{\sqrt{a^2-1}}$$

Así, $I = 2i\left(-\dfrac{\pi i \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^m}{\sqrt{a^2-1}}\right) = \dfrac{2\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^m}{\sqrt{a^2-1}}$

RHEIN

Fecha: / /

Como $F = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a-\cos(\theta)} d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{a-\cos(\theta)} d\theta$

$\Rightarrow$ Igualando partes real e imaginaria,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a-\cos(\theta)} d\theta = \frac{2\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{\sqrt{a^2-1}}$$

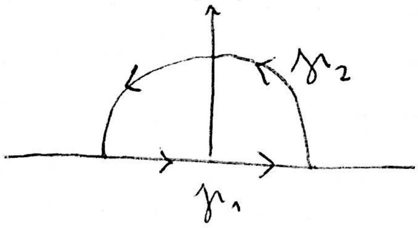
y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{a-\cos(\theta)} d\theta = 0.$$

//

Fecha: / /

P2 a) Consideremos $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+2z+2)(z^2+4)}$
y la curva dada por la semicircunferencia superior de radio R.



· Primero, notemos que $\int_{\gamma_2} f \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, en efecto:
$(z=Re^{i\theta} \Rightarrow dz = Rie^{i\theta}\,d\theta)$

$$\left|\int_{\gamma_2} f\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta}\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta}{(R^2e^{2i\theta}+2Re^{i\theta}+2)(R^2e^{2i\theta}+4)}\right|$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\%|\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2}{\underbrace{|R^2e^{2i\theta}+2Re^{i\theta}+2|}_{\geq R^2}\,\underbrace{|R^2e^{2i\theta}+4|}_{\geq R^2}}\,d\theta$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cancel{R^2}}{R^{\cancel{4}\,2}}\,d\theta = \frac{2\pi}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

· Luego, notemos que f es de la forma $f=p/q$ con $gr(p)=1 \leq 1+2=3 \leq 4 = gr(q)$.

$\Rightarrow$ Al tomar $R\to\infty$ (y recordando que $\int_{\gamma_2} f \to 0$)

(Resumen) $\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f,p_k) + \pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f,p_k')$

Donde p_k son los polos de la parte imaginaria positiva y p_k' los polos reales simples.

Fecha: / /

<u>Polos</u>:

$(z^2+2z+2)(z^2+4)=0 \Rightarrow z^2+2z+2=0 \lor z^2+4=0$

$\Rightarrow z=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} \lor z=\pm 2i$

$= -1\pm i$

$\Rightarrow$ los polos son $p_1=-1+i$, $p_2=-1-i$, $p_3=2i$, $p_4=-2i$, todos simples

Como sólo nos ~~interesan~~ los que tienen parte imaginaria positiva, nos quedamos con p_1 y p_3.

polos simples

- $\text{Res}(f,p_1) = \lim_{z\to p_1}(z-p_1)f(z) = \lim_{z\to p_1}\dfrac{z\cancel{(z-p_1)}}{\cancel{(z-p_1)}(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}$

$= \lim_{z\to p_1}\dfrac{z}{(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}$

$= \dfrac{p_1}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)(p_1-p_4)} \underset{p_3=-p_4}{=} \dfrac{-1+i}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)(p_1+p_3)}$

$= \dfrac{-1+i}{2i(p_1^2-p_3^2)} = \dfrac{-1+i}{2i(1-2i-1+4)}$

$= \dfrac{-1+i}{4i(2i+1)}$

- $\text{Res}(f,p_3) = \lim_{z\to p_3}(z-p_3)f(z) = \lim_{z\to p_3}\dfrac{z}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_4)}$

$= \dfrac{p_3}{(p_3^2+2p_3+2)(p_3+2i)} = \dfrac{2i}{4i(-4+4i+2)} = \dfrac{1}{4(2i-1)}$

Fecha: / /

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}\,dx = 2\pi i\left(\frac{-1+i}{4(2i+1)} + \frac{1}{4(2i-1)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{(i-1)(2i-1) + (2i+1)}{4(2i+1)(2i-1)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-\cancel{2}-i-\cancel{2i}+\cancel{1}+\cancel{2i}+\cancel{1}}{4(-4-1)}\right) = \frac{2\pi}{-20} = \frac{-\pi}{10}$$

b) Recordemos que $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Sea así $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{2(z^2+1)}$, que tiene como polos $i, -i$ ($\notin \mathbb{R}$).

y la semicircunferencia de la parte (a).

Notemos que, si $z = x+iy$

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{2}\left|\frac{1-e^{2iz}}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{(1+|e^{2iz}|)}{|z^2+1|}$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{1+e^{-2y}}{|z^2+1|} \overset{(y<1)}{\leq} \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z|^2}$$

(Resumen)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f, p_k)$$

(Obs: cuando hice la aux, acá agregué el término $\pi i \sum_{k=1} Res(f, p_k)$ lo cual fue un error)

$$\text{Además, } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{2ix}}{2(x^2+1)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2(x^2+1)}\,dx - i\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen(2x)}{2(x^2+1)}\,dx}_{0}$$

(impar, dominio simétrico)

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2(x^2+1)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen^2(x)}{(x^2+1)}\,dx$$

Fecha: / /

Sólo falta calcular los residuos:

Polos de f: $\pm i \rightarrow$ Sólo rodeamos $+i$ (semicirc. superior).

$$\Rightarrow Res(f,i) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{(1-e^{2iz})}{2(z+i)\cancel{(z-i)}}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1-e^{2iz}}{2(z+i)} = \frac{1-e^{-2}}{4i}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2(x)}{x^2+1}\,dx = 2\pi \cancel{i}\left(\frac{1-e^{-2}}{\cancel{4i}_{2}}\right) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2}) \quad //$$

c) Recordemos que $sen(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{2n+1}}$$

$\Rightarrow z=0$ es singularidad esencial.

Luego, por residuos:

$$\int_{|z|=r} sen\left(\frac{1}{z}\right)dz = 2\pi i\, Res(f,0) = 2\pi i\, a_{-1}.$$

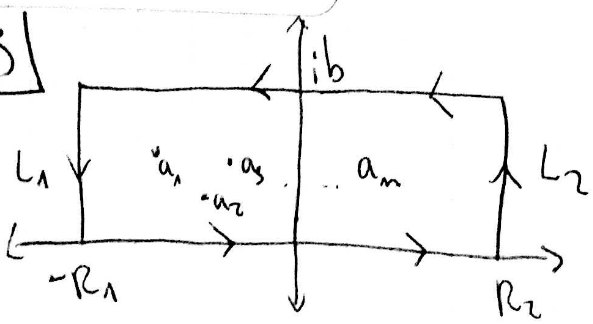
a_{-1} es el coeficiente asociado a $2n+1=1$

$$\Rightarrow n=0 \Rightarrow a_{-1} = \left.\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|_{n=0} = \frac{1}{1!} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} sen\left(\frac{1}{z}\right)dz = 1. \quad //$$

Fecha: / /

P3



$\Big\} \Gamma$

Consideremos el rectángulo con $R_1, R_2 > 0$ tales que todas las singularidades de $f \cdot g$ están ahí.

Por teo. Residuos: $\displaystyle\int_\Gamma f(z)g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f\cdot g, a_k)$

Además: $\displaystyle\int_\Gamma fg = \int_{-R_1}^{R_2} f(x)g(x)\,dx + \int_{L_2} fg + \int_{R_2}^{-R_1} f(x+ib)g(x+ib)\,dx + \int_{L_1} fg$

$$= \int_{-R_1}^{R_2} \Big(f(x)g(x) - \underbrace{f(x+ib)}_{f(x)}g(x+ib)\Big)\,dx + \int_{L_1} fg + \int_{L_2} fg$$

$$= \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\big(g(x) - g(x+ib)\big)\,dx + \int_{L_1} fg + \int_{L_2} fg$$

Por (iii), $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, |z| \geq M \Rightarrow |f(z)g(z)| < \varepsilon$.
Luego, tomando $|R_1| \geq M$:

$$\left|\int_{L_1} fg\right| \leq \int_{L_1} |f(z)g(z)|\,dz \leq b\varepsilon \Longrightarrow \int_{L_1} f(z)g(z)\,dz \to 0$$

cuando $R_2 \to \infty$.
Tomando $|R_2| \geq M$:

$$\left|\int_{L_2} fg\right| \leq \int_{L_2} |f(z)g(z)|\,dz \leq b\varepsilon \Rightarrow \int_{L_2} f(z)g(z)\,dz \to 0$$

cuando $R_1 \to \infty$.

Fecha: / /

Finalmente, tomando $R_1 \to \infty$ y $R_2 \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g(x) - g(x+ib))\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f \cdot g, a_k).$$