MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Secciones 1 y 3
Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: M. Ignacia Devoto - G. Sperone - H. Carrillo - N. Godoy
05 de Diciembre de 2013

Control 3

Parte 1

(a) (2 puntos) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

A partir de la serie de Fourier de f demuestre que

$$\sum_{\text{n impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(b) Sea f una función continua y 2L-periódica, cuya serie de Fourier está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Se define:

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt$$

(i) (1 punto) Demuestre que $\displaystyle\int_{-L}^{L} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = 0.$

(ii) (1 punto) Demuestre que $F(x)$ es 2L-periódica.

(iii) (2 puntos) Si el desarrollo de Fourier de F viene dado por:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Demuestre que $\forall n \geq 1$:

$$A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n \quad \text{y} \quad B_n = \frac{L}{n\pi} a_n$$

Hint: Use integración por partes.

Parte 2

La EDP, con sus condiciones iniciales y de borde, que modela las vibraciones de una viga estructural simplemente apoyada es

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 & \forall x \in (0, L), \quad t > 0 \\[2mm] u(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 & \\[2mm] u(L,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 & \\[2mm] u(x,0) = f(x) & \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \end{cases}$$

(a) (1,2 puntos) Usando el método de separación de variables en la forma $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$, pruebe que para resolver el problema espacial, deben encontrarse aquellas constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que la EDO siguiente tenga soluciones no triviales:

$$(P_{vp}) \begin{cases} \alpha\phi(x) + \phi^{(4)}(x) &= 0 \quad \forall x \in (0,L), \ \ t > 0 \\ \phi(0) = \phi''(0) &= 0 \quad (\text{CB en } x = 0) \\ \phi(L) = \phi''(L) &= 0 \quad (\text{CB en } x = L) \end{cases}$$

(b) (1,2 puntos) Pruebe que cuando $\alpha = 0$, la única solución del problema (P_{vp}) es $\phi \equiv 0$.

(c) (1,2 puntos) Multiplique la EDO del problema (P_{vp}) por $\phi(x)$, integre por partes y utilice las condiciones de borde para probar que toda solución de (P_{vp}) satisface la relación:

$$\alpha \int_0^L \phi^2(x)\,dx + \int_0^L [\phi''(x)]^2\,dx = 0$$

(d) (1,2 puntos) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ entonces la única solución del problema (P_{vp}) es $\phi \equiv 0$.

(e) (2,4 puntos) Según los resultados anteriores, el problema (P_{vp}) tiene soluciones no triviales sólo si $\alpha < 0$. Haga el cambio de variable $\alpha = -a^4$ donde $a > 0$ y resuelva el problema (P_{vp}).

Hint: Recuerde que la solución general de la EDO en el problema (P_{vp}) es de la forma

$$\phi(x) = A\cosh(ax) + B\,\mathrm{senh}(ax) + C\cos(ax) + D\,\mathrm{sen}(ax)$$

Use las condiciones de borde en $x = 0$ para encontrar A y C. Luego, utilice las condiciones de borde en $x = L$ para probar que $B = 0$ y $D\,\mathrm{sen}(aL) = 0$. Use estos resultados para concluir que la solución es no trivial solo cuando $a = a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, donde debe explicitar los a_n y los ϕ_n correspondientes.

(f) (1,2 puntos) Para cada a_n de la ecuación anterior, resuelva la ecuación temporal y pruebe que la n-ésima solución de la EDP+CB en el problema (P) es de la forma

$$u_n(x,t) = [A_n\cos(\omega_n t) + B_n\,\mathrm{sen}(\omega_n t)]\,\mathrm{sen}(a_n x)$$

donde debe explicitar los valores ω_n en términos de a_n y los datos del problema.

(g) (1,2 puntos) Indique cuál es la solución del problema (P) si las condiciones iniciales son:

$$f(x) = 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = -7\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

(h) (1,2 puntos) Considere el caso general en que $f(x)$ y $g(x)$ se pueden desarrollar en series de Fourier de senos en $[0,L]$. En este caso, escriba la solución formal $u(x,t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo las fórmulas que permiten calcular los coeficientes A_n y B_n en términos de las funciones f y g.

(i) (1,2 puntos) Escriba la solución formal del problema (P) en el caso particular en que $f(x) = x(L-x)$ y $g(x) = 0$. Debe calcular todos los coeficientes.

Tiempo: 3 horas.

Parte 1

(a) 0.5

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \xcancel{x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}}^{\,0}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\,dx = \frac{\cos(nx)}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

0.5

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{(-\cos(nx))}{n}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n\pi} + \frac{1}{\pi}\,\xcancel{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}}^{\,0}\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{-2}{n\pi} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Serie Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-2)}{\pi n^2}\cos(nx) + \sum_{n \text{ par}} \frac{(-2)}{n\pi}\operatorname{sen}(nx)$$

1pto

Al evaluar en $x=0$, se elimina la última suma quedando (y $f(0)=0$, f continua en 0)

$$0 = \frac{\pi}{4} + \frac{(-2)}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \frac{(1)}{n^2} \Rightarrow \sum_{\text{impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(b)

2/3

(i) recordar que $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

así $\int_{-L}^{L}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt$

1pto

$$= \int_{-L}^{L} f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dt$$

$$= \underline{L\cdot a_0} - \underbrace{\frac{a_0}{2}\cdot 2L} = 0$$

(ii)

$$F(x+2L)-F(x) = \int_0^{x+2L}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt - \int_0^{x}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt$$

$$= \int_x^{x+2L}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt = \boxed{\int_x^{x+2L} f(t)\,dt - \int_x^{x+2L}\frac{a_0}{2}\,dt}$$

0.5

$$= \int_{-L}^{L} f(t)\,dt - 2L\cdot\frac{a_0}{2} = 0$$

pues f es 2L-periódica

0.5

O bien, como $f(t)-\frac{a_0}{2}$ es 2L periódica

$$\int_x^{x+2L}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt = \int_{-L}^{L}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt$$

$$= 0 \quad (\text{por (i)})$$

Por lo anterior concluimos que $F(x+2L)=F(x)$,

iii) $F(x) = \int_0^{x}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)-\frac{a_0}{2}$

$\forall n\geq 1$ $\quad A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dt$

$$= \frac{F(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{L\cdot n\pi/L}\Bigg|_{-L}^{L} - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{F'(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n\pi/L}\,dx$$

3/3

$$= \frac{F(L)\,\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}^{0}}{n\pi} - \frac{F(-L)\,\cancel{\operatorname{sen}(-n\pi)}^{0}}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\frac{L}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \underbrace{\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx}_{0}$$

pues $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ impar

$$= -\frac{L}{n\pi}\cdot b_n \qquad 1\text{pto}$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{L}\cdot\left.\frac{F(x)\cdot\left(-\cos\frac{n\pi x}{L}\right)}{n\pi/L}\right|_{-L}^{L}}_{} - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\cdot\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}{n\pi/L}dx$$

0.5ptos $=0$ pues $F(L)=F(-L)$: son $2L$ periódicas

$\cos\left(\frac{n\pi L}{L}\right)=\cos\left(\frac{n\pi(-L)}{L}\right)$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\left(-\cos\frac{n\pi x}{L}\right)dx - \frac{a_0}{2L}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{L}{n\pi}\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - \left.\cancel{\frac{a_0\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{2L\cdot n\pi/L}}^{0}\right|_{-L}^{L}$$

0.5ptos

$$= \frac{L}{n\pi}\cdot a_n$$

Problema 2. (Puntaje doble)

La EDP que modela las vibraciones de una viga estructural simplemente apoyada es

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 & \text{para } x \in (0, L) \text{ y } t>0 \\ u(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 & (\text{CB en } x = 0) \\ u(L,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 & (\text{CB en } x = L) \\ u(x,0) = f(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \end{cases}$$

a) Usanmos el método de separación de variables, en la forma sugerida: $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Reemplazandoe el la EDP de $(\mathcal{P})$ se obtiene

0.4 $\longrightarrow$ $\psi''(t)\phi(x) + e^2\psi(t)\phi^{(4)}(x) = 0.$

Haciendo el despeje habitual se obtiene que

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -e^2\frac{\phi^{(4)}(x)}{\phi(x)}.$$

como las variables x y t son independientes, la ecuación anterior solo puede verificarse si ambos lados son iguales a una constante. Sea λ dicha constante, se obtienen dos ecuaciones, una temporal y una espacial

0.4 $\longrightarrow$
$$\begin{aligned} \psi''(t) &= \lambda\psi(t) \\ \phi^{(4)}(x) &= -\frac{\lambda}{e^2}\phi(x). \end{aligned}$$

Para que la ecuación tome la forma del enunciado hacemos el cambio de constante: $\alpha = \frac{\lambda}{e^2}$.

Las condiciones de borde se escriben

$$\psi(t)\phi(0) = \psi(t)\phi''(0) = \psi(t)\phi(L) = \psi(t)\phi''(L), \qquad \forall t$$

0.4

luego, para que la solución no sea constantemente nula, la función espacial ϕ debe satisfacer las ecuaciones del enunciado. Es decir

$$(\mathcal{P}_{vp}) \begin{cases} \alpha\phi(x) + \phi^{(4)}(x) = 0 & \text{para } x \in (0, L) \\ \phi(0) = \phi''(0) = 0 & (\text{CB en } x = 0) \\ \phi(L) = \phi''(L) = 0 & (\text{CB en } x = L) \end{cases}$$

b) Si $\alpha = 0$, entonces la EDO de $(\mathcal{P}_{vp})$ se reduce a $\phi^{(4)}(x) = 0$, cuya solución es $\phi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, con $\phi''(x) = 2C + 6Dx$. Evaluando las CB en cero se obtiene $A = C = 0$. Evaluando las CB en L se obtiene un sistema de ecuaciones

1.2

$$\begin{aligned} C + DL &= 0 \\ C + 3DL &= 0, \end{aligned}$$

el cual solo posee solución trivial. Por lo tanto $\phi \equiv 0$.

c) Multiplicamos la EDO del problema $(\mathcal{P}_{vp})$ por $\phi(x)$ e integramos por partes dos veces:

0.4

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \int_0^L \phi^2(x) + \int_0^L \phi^{(4)}(x)\phi(x)dx \\ &= \alpha \int_0^L \phi^2(x) + \phi^{(3)}(x)\phi(x)\Big|_0^L - \int_0^L \phi^{(3)}(x)\phi'(x)dx \\ &= \alpha \int_0^L \phi^2(x) + \phi^{(3)}(x)\phi(x)\Big|_0^L - \phi^{(2)}(x)\phi'(x)\Big|_0^L + \int_0^L \phi^{(2)}(x)\phi^{(2)}(x)dx. \end{aligned}$$

0.4

Usando las CB la expresión anterior queda

$$\alpha \int_0^L \phi^2(x)dx + \int_0^L [\phi''(x)]^2 dx = 0.$$

0.4

d) Si $\alpha > 0$, la relación anterior implica que ambos sumandos deben ser nulos (suma de números ≥ 0 igual a cero) por lo tanto

1.2

$$\int_0^L \phi^2(x)dx = 0$$

y como se trata de una función (supuestamente) continua, se obtiene que $\phi \equiv 0$.

e) Hacemos el cambio de variables $\alpha = -a^4$ donde $a > 0$. Con esto la EDO en $(\mathcal{P}_{vp})$ queda

$$\phi^{(4)}(x) = a^4\phi(x)$$

cuyo polinomio caracteristico tiene las raices $\pm ia$ y $\pm a$. Por lo tanto, la solución general es de la forma

06

$$\phi(x) = A\cosh(ax) + B\text{senh}(ax) + C\cos(ax) + D\text{sen}(ax).$$

Usamos las CB en $x = 0$: queda

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A - C &= 0, \end{aligned}$$

0.6 de donde obtenemos que $A = C = 0$.
Ahora usamos las CB en L: queda

$$\begin{aligned} B\text{senh}(aL) + D\text{sen}(aL) &= 0 \\ B\text{senh}(aL) - D\text{sen}(aL) &= 0, \end{aligned}$$

0.6 de donde se deduce que $B = 0$ y $D\text{sen}(aL) = 0$. Como al imponer $D = 0$ la solución es la trivial, solo se obtienen soluciones NO triviales imponiendo

$$\text{sen}(aL) = 0.$$

0.6 Esta ecuación tiene las soluciones clásicas $a = a_n = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Así, las soluciones no nulas de $(\mathcal{P}_{vp})$ son

$$\phi_n(x) = \text{sen}(a_n x), \qquad \text{donde } a_n = \frac{n\pi}{L}.$$

f) La ecuación temporal es

0.4
$$\psi''(t) = \lambda\psi(t) = -e^2a^4\psi(t)$$

cuya solución general es

0.4
$$\psi(t) = A\cos\left(ea^2t\right) + B\text{sen}\left(ea^2t\right).$$

Usando esta solución para cada a_n encontrado en (e) se concluye que la n−ésima solución de la EDP+CB en el problema $(\mathcal{P})$ es de la forma

0.4
$$u_n(x,t) = \left[A_n\cos\left(\omega_n t\right) + B_n\text{sen}\left(\omega_n t\right)\right]\text{sen}\left(a_n x\right),$$

donde $\omega_n = ea_n^2$ y $a_n = \frac{n\pi}{L}$.

g) Si las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\text{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \\ g(x) &= -7\text{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

entonces la solución del problema $(\mathcal{P})$ es de la forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[A\cos\left(\omega_4 t\right) + B\text{sen}\left(\omega_4 t\right)\right]\text{sen}\left(a_4 x\right), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \left[-Aw_4\text{sen}\left(\omega_4 t\right) + B\omega_4\text{cos}\left(\omega_4 t\right)\right]\text{sen}\left(a_4 x\right). \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$ se obtiene

1.2
$$\begin{aligned} A &= 5 \\ B\omega_4 &= -7, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$u(x,t) = \left[5\cos\left(\omega_4 t\right) - \frac{7}{\omega_4}\text{sen}\left(\omega_4 t\right)\right]\text{sen}\left(a_4 x\right).$$

h) En el caso general en que $f(x)$ y $g(x)$ se pueden desarrollar en series de Fourier de senos en $[0, L]$, la solución se busca como la serie

0.4

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\right] \operatorname{sen}(a_n x).$$

Evaluenado en las condiciones iniciales se obtiene que los coeficientes A_n y $B_n\omega_n$ son los coeficientes de fourier de f y g respectivamente, es decir

0.4

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(a_n x)dx$$

0.4

$$B_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}(a_n x)dx.$$

i) Finalmente, si $f(x) = x(L-x)$ y $g(x) = 0$, los coeficientes anteriores son:

0.2

$$\begin{aligned}
B_n &= 0\\
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\operatorname{sen}(a_n x)dx, \qquad \text{(por partes)} \quad \begin{array}{ll} u = x(L-x) & du = (L-2x)dx \\ dv = \operatorname{sen}(a_n x) & v = -\frac{1}{a_n}\cos(a_n x) \end{array}\\
&= \frac{2}{L}\left(-\left[x(L-x)\frac{1}{a_n}\cos(a_n x)\right]_0^L + \frac{1}{a_n}\int_0^L (L-2x)\cos(a_n x)dx\right)\\
&= \frac{2}{La_n}\int_0^L (L-2x)\cos(a_n x)dx, \qquad \text{(por partes)} \quad \begin{array}{ll} u = (L-2x) & du = -2dx \\ dv = \cos(a_n x) & v = \frac{1}{a_n}\operatorname{sen}(a_n x) \end{array}\\
&= \frac{2}{La_n}\left(\left[(L-2x)\frac{1}{a_n}\operatorname{sen}(a_n x)\right]_0^L + \frac{2}{a_n}\int_0^L \operatorname{sen}(a_n x)dx\right)\\
&= \frac{4}{La_n^2}\int_0^L \operatorname{sen}(a_n x)dx\\
&= \frac{4}{La_n^3}\left[\cos(a_n x)\right]_L^0\\
&= \frac{4}{La_n^3}\left[1-(-1)^n\right] = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

0.4

0.4

0.2

Por lo tanto

$$u(x,t) = \frac{4L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right)\cos(\omega_n t)\operatorname{sen}(a_n x).$$