Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
20 de Noviembre del 2008 Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 3: MA2A2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

a) Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \pi/4$ para todo $x \in (0, \pi)$.
Indicación: Note que la expresión del lado izquierdo es la serie de Fourier de una función impar.

b) Muestre que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$, y encuentre la transformada de Fourier de $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Problema 2. Resuelva el problema de Dirichlet en un disco plano

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & 0 < \rho < R, -\pi < \theta < \pi \\ u(R, \theta) &= T & 0 < \theta < \pi \\ u(R, \theta) &= -T & -\pi < \theta < 0. \end{aligned}$$

Recordando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas $\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, considere los siguientes pasos:

a) Usando separación de variables $u(\rho, \theta) = R(\rho) T(\theta)$ pruebe que $\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} (\rho R') = -\frac{T''}{T} = \lambda \equiv cte.$

b) Imponga las condiciones de periodicidad $T(-\pi) = T(\pi)$ y $T'(-\pi) = T'(\pi)$, para encontrar una familia numerable de soluciones $T_k(\theta) = a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (con $\lambda = k^2$).

c) Para $\lambda = k^2$ considere soluciones del tipo $R(\rho) = \rho^p$ e imponga la condición $|R(0)| < +\infty$ para encontrar el $R_k(\rho)$ correspondiente.

d) Imponga las condiciones de borde $u(R, \theta) = \pm T$ para encontrar u (puede usar **P1.a)**).

Problema 3. Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan por la ecuación

$$(V) \qquad u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad x > 0, t > 0.$$

Suponga que la varilla satisface una condición de Neuman en el orígen $u_x(t, 0) = 0, \forall t > 0$; que $\int_0^{\infty} |u(t, x)| dx < \infty$; y que inicialmente la varilla se encuentra en reposo $u_t(0, x) = 0$ en la posición $u(0, x) = \frac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$ (puede servirle la parte **P1.b)**).

a) Considere $v(t, \cdot)$ la extensión par de la función $u(t, \cdot)$. Verifique que esta extensión satisface la ecuación (V) para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

b) Deduzca que la transformada de Fourier de $v(t, \cdot)$ es $\hat{v}(t, s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t)$.

c) Concluya que la solución $u(t, x)$ se puede escribir en forma integral como

$$u(t, x) = \int_0^{\infty} e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t) ds.$$

P1 a) Consideremos la función impar

$$f(x)=\begin{cases} -\pi/4 & \text{si } x\in(-\pi,0) \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \pi/4 & \text{si } x\in(0,\pi). \end{cases}$$

Su serie de Fourier solo contendrá los términos "sen kx", más precisamente.

$$S_f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kx$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx=\frac{2}{\cancel{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{\cancel{\pi}}{4}\operatorname{sen} kx\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos kx}{k}\right)\Big|_{x=0}^{\pi}$$

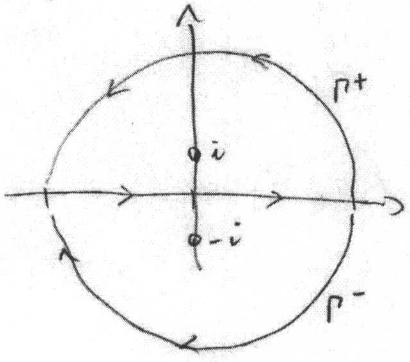
$$\Rightarrow\quad a_k=\frac{1}{2k}\left[1-\cos k\pi\right]=\frac{1}{2k}\left[1-(-1)^k\right]=\begin{cases}\frac{1}{k} & \text{si } k \text{ impar}\\ 0 & \text{si } k \text{ par}.\end{cases}$$

Luego $$S_f(x)=\sum_{k\ \text{impar}}\frac{1}{k}\operatorname{sen} kx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)}.$$

Dado que f es continua en $(0,\pi)$ concluimos que $S_f(x)=f(x)\ \forall x\in(0,\pi)$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)}=\frac{\pi}{4}\qquad\forall\, x\in(0,\pi).$$

P1 b) $T\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ evaluamos por Teo. de Residuos usando la curva Γ^+ si $(-s)>0$ y Γ^- si $(-s)<0$.



$$\Rightarrow\ T\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi i\ \operatorname{Res}\left(e^{-isz}\frac{1}{z^2+1},\, i\right)\cdot \underbrace{\operatorname{Ind}_{\Gamma^+}(i)}_{1} & s<0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi i\ \operatorname{Res}\left(e^{-isz}\frac{1}{z^2+1},\,-i\right)\cdot \underbrace{\operatorname{Ind}_{\Gamma^-}(-i)}_{-1} & s>0\end{cases}$$

$$=\sqrt{2\pi}\, i\cdot\begin{cases}e^{-is\,i}\cdot\frac{1}{2i} & s<0\\ e^{-is(-i)}\cdot\frac{1}{-2i} & s>0\end{cases}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|s|}$$

$$T\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)=T\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)=-\frac{1}{2}T\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)=-\frac{1}{2}\cdot(is)\cdot T\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{is}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|s|}.$$

1.a) $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$

$$u=RT \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R'T)+\frac{1}{\rho^2}RT''=0 \Rightarrow \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R'T)=-RT''$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R')=-\frac{T''}{T}=\lambda=cte$$

2b) $T''=-\lambda T \Rightarrow T=Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta}+Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}$

$$T(\pi)=T(-\pi) \Rightarrow Ae^{i\sqrt{\lambda}\pi}+Be^{-i\sqrt{\lambda}\pi}=Ae^{-i\sqrt{\lambda}\pi}+Be^{i\sqrt{\lambda}\pi}$$

$$\Rightarrow (A-B)e^{i\sqrt{\lambda}\pi}=(A-B)e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{(A-B)(e^{2i\sqrt{\lambda}\pi}-1)=0}$$

$$T'(\pi)=T'(-\pi) \Rightarrow \cancel{i\sqrt{\lambda}}Ae^{i\sqrt{\lambda}\pi}-\cancel{i\sqrt{\lambda}}Be^{-i\sqrt{\lambda}\pi}=\cancel{i\sqrt{\lambda}}Ae^{-i\sqrt{\lambda}\pi}-\cancel{i\sqrt{\lambda}}Be^{+i\sqrt{\lambda}\pi}$$

$$\Rightarrow (A+B)e^{i\sqrt{\lambda}\pi}=(A+B)e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{(A+B)(e^{2i\sqrt{\lambda}\pi}-1)=0}$$

Soluciones: 1) $e^{2i\sqrt{\lambda}\pi}-1=0 \Rightarrow \cancel{2}\cancel{i}\sqrt{\lambda}\cancel{\pi}=\cancel{2}k\cancel{\pi}\cancel{i}\quad k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \lambda=k^2\quad k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \lambda=k^2\quad k\in\mathbb{N}.$

2) $e^{2i\sqrt{\lambda}\pi}-1\neq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A-B=0\\A+B=0\end{array}\right\} \Rightarrow A=B=0 \Rightarrow$ soln trivial.

$$\Rightarrow T_k(\theta)=A_k e^{ik\theta}+B_k e^{-ik\theta}=a_k\cos k\theta+b_k\,\mathrm{sen}\,k\theta \qquad k=0,1,2,\dots$$

P2.c) $R(\rho)=\rho^p \Rightarrow \frac{\rho}{\rho^p}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot p\rho^{p-1}\right)=\frac{1}{\rho^{p-1}}\cdot p\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^p)=\frac{p^2\rho^{p-1}}{\rho^{p-1}}=\lambda=k^2 \Rightarrow p=\pm k$

$R(\rho)=\rho^k,\ \rho^{-k}$

$|R(0)|<\infty \Rightarrow p=k \Rightarrow R_k(\rho)=\rho^k$

$$\Rightarrow u_k(\rho,\theta)=\rho^k\left[a_k\cos k\theta+b_k\,\mathrm{sen}\,k\theta\right]$$

P2.d). $u(R,\theta)=\begin{cases}-T & \text{si } \theta\in(-\pi,0)\\ T & \text{si } \theta\in(0,\pi)\end{cases}=\frac{4T}{\pi}\cdot\begin{cases}-\pi/4 & \text{si } \theta\in(-\pi,0)\\ \pi/4 & \text{si } \theta\in(0,\pi)\end{cases}=\frac{4T}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n+1)\theta}{(2n+1)}$

$$u(\rho,\theta)=\sum^{\infty}\rho^k\left[a_k\cos k\theta+b_k\,\mathrm{sen}\,k\theta\right]$$

$$u(R,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \left[a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta\right] = \frac{4T}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{(2n+1)}$$

$\Rightarrow$ $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$b_k = 0 \quad \forall k$ par.

$R^k b_k = \dfrac{4T}{\pi k} \quad k$ impar.

$$\Rightarrow \boxed{u(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n+1} \cdot \frac{4T}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{(2n+1)}}$$

3a)

$$v(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & \text{si } x>0,\ t>0 \\ u(t,-x) & \text{si } x<0,\ t>0 \end{cases}$$

$$a^2 v_{xxxx}(t,x) = \begin{cases} a^2 u_{xxxx}(t,x) & \text{si } x>0,\ t>0 \\ a^2 u_{xxxx}(t,-x) & \text{si } x<0,\ t>0 \end{cases} = \begin{cases} u_{tt}(t,x) & x>0,\ t>0 \\ u_{tt}(t,-x) & x<0,\ t>0 \end{cases} = v_{tt}(t,x).$$

3b).

$$v_{tt} = -a^2 v_{xxxx} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(t,s) = -a^2 (is)^4 \hat{v}(t,s) = -a^2 s^4 \hat{v}(t,s)$$

$$\Rightarrow \hat{v}(t,s) = \alpha(s) \cos as^2 t + \beta(s) \operatorname{sen} as^2 t.$$

$$v_t(0,x) = \begin{cases} u_t(0,x) = 0 & \text{si } x>0 \\ u_t(0,-x) = 0 & \text{si } x<0 \end{cases} \equiv 0 \Rightarrow \hat{v}_t(0,s) = 0 = -as^2\alpha(s) \underbrace{\operatorname{sen} as^2 0}_{0} + as^2\beta(s) \underbrace{\cos as^2 0}_{1}$$

$$\Rightarrow as^2 \beta(s) = 0 \Rightarrow \beta(s) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \hat{v}(t,s) = \alpha(s) \cos as^2 t.$$

$$\hat{v}(0,s) = T\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|} = \alpha(s) \cdot \underbrace{\cos as^2 0}_{1} \Rightarrow \alpha(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|}$$

$$\Rightarrow \hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|} \cos as^2 t$$

3c)

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\, \hat{v}(t,s)\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|} \cos(as^2 t)\, ds.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{isx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-s} \cos(as^2 t)\, ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{+isx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{s} \cos(as^2 t)\, ds}_{\text{C.V. } -s} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{isx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-s} \cos(as^2 t)\, ds + \int_{\infty}^{0} e^{-isx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-s} \cos(as^2 t)\, d(-s) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{isx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-s} \cos(as^2 t)\, ds + \int_0^{\infty} e^{-isx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-s} \cos(as^2 t)\, ds \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[\int_0^{\infty} \underbrace{(e^{isx} + e^{-isx})}_{2\cos(sx)} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-s} \cos(as^2 t)\, ds \right]$$

$$v(t,x) = \int_0^{\infty} \cos(sx) \cdot e^{-s} \cdot \cos(as^2 t)\, ds. \qquad x \in \mathbb{R},\ t>0$$

para $x>0$: $\boxed{u(t,x) = \int_0^{\infty} e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t)\, ds.}$