Control 3
MA2002: Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2015-2

Profesor: Álvaro Hernández
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

Pregunta 1. Resuelva el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t + \gamma u_x - c^2 u_{xx} = 0 & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \exp(\frac{\gamma}{2c^2} x) & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{1}$$

Donde γ y c son constantes positivas.

Pregunta 2.

1. (1.5 puntos) Sea f $2\pi-$periódica e integrable en $[-\pi,\pi]$. Suponer que a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f. Si A_k y B_k representan los coeficientes de Fourier de $f(x+\pi)$ muestre que

$$\begin{aligned} A_k &= (-1)^k a_k, \qquad & k = 0,1,2,3,\ldots \\ B_k &= (-1)^k b_k, \qquad & k = 1,2,3,4\ldots \end{aligned}$$

2. (1.5 puntos) Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y Suponer que $f(x+\pi) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

   a) (1.5 puntos) Mostrar que f es $2\pi-$periódica.

   b) (1.5 puntos) Mostrar que la serie de Fourier de f tiene solamente términos impares, es decir $a_{2n} = b_{2n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) (1.5 puntos) Recíprocamente: muestre que si la serie de Fourier de f tiene solamente términos impares entonces $f(x+\pi) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Pregunta 3. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Asumamos que f y g son integrables y continuas. Denotemos por $F(s) = \mathcal{F}f(s)$ y $G(s) = \mathcal{F}g(s)$, donde $\mathcal{F}$ denota a la transformadas de Fourier. Asumamos que F y G son funciones integrables.

1. Muestre que $\mathcal{F}(fg) = F * G$, donde $*$ denota es el producto convolución.

2. Deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt = \int_{\infty}^{\infty} F(s)G(-s)\,ds$$

3. Asumir ahora que f y g son funciones a valores reales, i.e. $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\overline{G(s)}\,ds,$$

   y concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2\,ds$$

   Observación: $\overline{G(s)}$ denota el conjugado complejo de $G(s)$.

4. Encuentre en forma explícita $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})$, donde $\chi_{[-a,a]}$ es la función característica sobre el intervalo $[-a,a]$, $(a > 0)$, es decir:

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a,a] \\ 0 & \text{si } x \notin [-a,a] \end{cases}$$

5. Encuentre el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(3x)}{x^2}\,dx$$

Denotemos por F

Pauta C3 CAA, 2015-2, Álvaro Hernández

P1

Pauta C3 CAA 2015-2 A. Hernández

P1) $u_t + \gamma u_x - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in (0,\pi),\ t>0$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$u(x,0) = f(x)\, \exp(\gamma x/(2c^2))$

$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow XT' + \gamma X'T - c^2X''T = 0$

$\Leftrightarrow \gamma \frac{X'}{X} - c^2 \frac{X''}{X} = -\frac{T'}{T} = \lambda$

A) $\begin{cases} c^2X'' - \gamma X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$ B) $T' + \lambda T = 0$

Solución de B) $T(t) = C e^{-\lambda t}$

Solución de A) Ansatz $X(x) = e^{\mu x}$

$X'(x) = \mu e^{\mu x}$

$X''(x) = \mu^2 e^{\mu x}$ $\therefore$

$\therefore c^2\mu^2 e^{\mu x} - \gamma\mu e^{\mu x} + \lambda e^{\mu x} = 0$

$\Rightarrow c^2\mu^2 - \gamma\mu + \lambda = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \dfrac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4c^2\lambda}}{2c^2}$

$:= \alpha \pm \beta \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$X(x) = Ae^{\mu_1 x} + Be^{\mu_2 x}$

$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$

$X(x) = Ae^{\mu_1 x} - Ae^{\mu_2 x} =$

$= Ae^{\alpha x + \beta x} - Ae^{\alpha x - \beta x} = Ae^{\alpha x}(e^{\beta x} - e^{-\beta x})$

$= 2Ae^{\alpha x} \sinh \beta x$

$x(\pi) = 2A\, e^{\alpha\pi} \sinh \beta\pi = 0 \iff \pi\beta = k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$

(esto pues $\alpha \in \mathbb{R}$ y por propiedades del sinh)

$\therefore\ \beta = \dfrac{\sqrt{\gamma^2 - 4c^2\lambda}}{2c^2} = \sqrt{\dfrac{\gamma^2 - 4c^2\lambda}{4c}} = ki$

$\Rightarrow \gamma^2 - 4c^2\lambda = -k^2 4c \Rightarrow \lambda = \dfrac{k^2}{c} + \left(\dfrac{\gamma}{2c}\right)^2$

Además $e^{kix} - e^{-ki} = 2i \sin kx \quad k \in \mathbb{Z}$

luego

$u_k(x,t) = A_k\, e^{(k^2/c + (\gamma/2c)^2)t + \alpha x} \sin kx$

Notar que $u_{-k} = -u_k$ luego basta considerar $k \in \mathbb{N}$

Además $u_0 = 0$ pues $\sin 0 = 0$, luego

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{(k^2/c + (\gamma/2c)^2 t + \alpha x} \sin kx$

$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\alpha x} \sin kx$

Notar que $f(x) = e^{\alpha x}$ y dada la igualdad anterior debemos tener que A_k sean los coeficientes de Fourier de

$f(x)\, e^{-\alpha x} = 1$, i.e

$A_k = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) e^{-\alpha x} \sin kx\, dx$

$= \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx\, dx = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & k \text{ impar} \\ 0 & k \text{ par.} \end{cases}$

P2

P3.1

Sea $g(x) = f(x+\pi)$ entonces los coef. de g son

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\cos nx \qquad u = x+\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(u)\cos n(u-\pi)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(u)\left(\cos nu \underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n} - \sin nu \underbrace{\sin n\pi}_{=0}\right) du$$

$$= a_n(-1)^n.$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\sin n\pi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(u)\left(\underbrace{\sin nu}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + \underbrace{\sin n\pi}_{=0}\cos nu\right)du$$

$$= (-1)\, b_n$$

P3.2. a)

$f(x+2\pi) = f(x+\pi+\pi) = -f(x+\pi) = --f(x) = f(x)$

$\therefore f$ es 2π periódica

b) Por la parte 1 tenemos que los coef. de Fourier de f son los de la función $-g(x)$ y por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} a_n &= -(-1)^n a_n \\ b_n &= -(-1)^n a_n \end{aligned}\right\} \; n \text{ par} \Rightarrow \begin{aligned} a_{2n} &= -(-1)^{2n} a_{2n} \\ b_{2n} &= -(-1)^{2n} b_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_{2n} &= -a_{2n} \Rightarrow a_{2n} = 0 \\ b_{2n} &= -b_{2n} \Rightarrow b_{2n} = 0 \end{aligned}$$

c) dado que $f \in C^1([-\pi,\pi])$ entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f

d) Así $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ con $a_{2n} = b_{2n} = 0$

de aquí al evaluar el lado derecho en $x+\pi$ obtenemos que $f(x) = -f(x+\pi)$.

P3

P3 Mostremos que $\mathcal{F}^{-1}(F * G) = fg\sqrt{2\pi}$

$$\mathcal{F}^{-1}(F * G)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (F * G)(s)\, e^{isx}\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\, G(y)\, dy\; e^{-isx}\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\, G(y)\, e^{isx}\, ds\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) \int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\, e^{isx}\, ds\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{i(u+y)x}\, du\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, e^{iyx}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{iux}\, du$$

$$= \mathcal{F}^{-1}(G)(x)\; \mathcal{F}^{-1}(F)(x)\; \sqrt{2\pi}$$

$= \sqrt{2\pi}\, fg$, ahora aplicamos $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(G * F)) = G * F = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(fg)$$

reemplazando g por f obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\,\overline{F(s)}\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)|^2\,ds.$$

4): $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-isx}\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{-is}\,e^{-isx}\Big|_{-a}^{a} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,is}\left(e^{-ias} - e^{ias}\right)$$

$$= \frac{e^{ias} - e^{-ias}}{2i}\;\frac{2}{s\sqrt{2\pi}} = \frac{\sin as}{s}\;\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

5) Usando 4) y 3) tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin as}{s}\right)^2\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2_{[-a,a]}(x)\,dx$$

$$= 2a$$

con $a = 3$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin 3s}{s}\right)^2 ds = 3\cdot 2\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2 = 3\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{4} = 3\pi$$