

Guía de ejercicios # 3 - MA26B Matemáticas Aplicadas
Ecuaciones en derivadas parciales
Semestre 2007-2

Profesor: J. Dávila

Series y transformadas de Fourier

1. a) Calcule el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $(-1, 1)$. ¿Cuál es el valor del desarrollo en el punto $x = 2$?

b) Integrando término a término el desarrollo anterior, y desarrollando en el mismo intervalo una función adecuada, demuestre (!) que $\int e^x dx = e^x + c$. Asimismo, demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} = \frac{e + \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}}{e^2 - 1}.$$

¿Qué ocurriría si deriváramos término a término el desarrollo del ejercicio anterior? Muestre que tendríamos como consecuencia absurdos tales como: $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m = -1/2$.

2. Calcule el desarrollo de Fourier de $f(x) = x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Usando ese desarrollo, demuestre que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

i) $f(x) = e^{-\rho x^2}, \quad \rho > 0$

ii) $f(x) = \begin{cases} V & \text{si } |x| \leq C \\ 0 & \text{si } |x| > C \end{cases}$ donde $V > 0$ y $C > 0$.

Ecuacion del calor en dimensión 1

4. Hallar la solución a la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$$

con condiciones de borde

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 1,$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{L}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

5. Resolver el modelo:

$$\frac{\delta u}{\delta t} - k^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0 \quad 0 < x < \pi \quad t \geq 0$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}(0, t) = \frac{\delta u}{\delta x}(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \cos^2(x) \quad 0 < x < \pi$$

Hint: $2 \cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$

6. Resolver la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -L < x < L, \quad t > 0$$

con condiciones de borde e iniciales

$$u(-L, t) = u(L, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

7. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u$$

con las condiciones de borde

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0,$$

que corresponde a una varilla unidimensional con superficies laterales aisladas y donde existe pérdida de calor proporcional a la temperatura.

a) ¿Cuales son las posibles distribuciones de temperaturas en el equilibrio si $\alpha > 0$?

b) Resolver el problema dependiente del tiempo, sujeto a $u(x, 0) = f(x)$, para $\alpha > 0$. Analizar la temperatura para tiempos grandes ($t \rightarrow \infty$) y comparar con los resultados obtenidos en a).

c) Rehacer b) para $\alpha < 0$. Préstese especial cuidado al caso $\frac{-\alpha}{k} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Ecuación de Laplace y ecuación del calor en dimensión 2

8. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

para $0 < y < H, -\infty < x < \infty$ sujeta a las condiciones:

a)

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, H) = f_2(x) \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(\pm\infty, y) = 0 \quad 0 < y < H.$$

b)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, H) = f_2(x) \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(\pm\infty, y) = 0 \quad 0 < y < H.$$

9. Hallar una función $(x, y) \mapsto u(x, y)$ que sea armónica en la banda semi-infinita $(0, \pi) \times (0, +\infty)$ y tal que

$$\begin{cases} |u(x, y)| < +\infty & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, +\infty) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & y \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 1 & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

10. Resolver la ecuación de Laplace dentro de una banda semi-infinita $(0 < x < \infty, 0 < y < H)$, con las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= f(y) \\ u(\infty, y) &= 0. \end{aligned}$$

11. Considere la ecuación del calor en una región rectangular bidimensional $0 < x < L, 0 < y < H$, resuelva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y, 0)$$

con las condiciones de borde:

a)

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, H, t) = 0$$

b)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, t) = 0.$$

12. Resolver la ecuación de Laplace en el exterior de un disco de radio a , con las condiciones

$$\begin{aligned} u(r, -\pi) &= u(r, \pi) \quad \forall r \geq a \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) &= \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi) \quad \forall r \geq a \\ u(a, \theta) &= f(\theta) \end{aligned}$$

Se puede suponer además que $u(r, \theta)$ es finito cuando $r \rightarrow \infty$.

Hint: en cilíndricas

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

13. Una esfera de radio R cumple la ecuación del calor, esto es, la temperatura $T(r, t)$ cumple la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \Delta T$$

donde c es una constante. Calcule la temperatura al interior de la esfera para todo instante $t > 0$, bajo las siguientes condiciones:

- i. La temperatura de la superficie de la esfera es nula en todo instante,
- ii. La temperatura toda un valor finito en todos los puntos de la esfera,
- iii. el valor inicial de la temperatura es

$$T(r, 0) = \frac{T_0 R}{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi r}{R} \right).$$

(La esfera está en \mathbb{R}^3 y r denota la distancia al origen en coordenadas esféricas.)

14. Utilizando el método separación de variables, encontrar una solución de

$$\Delta u(x, y) + u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in (1, 0) \times (0, 2)$$

que satisface las condiciones de bordes

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 & x \in (0, 1) \\ u(x, 2) = x(x - 1) & x \in (0, 1) \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 & y \in (0, 2) \end{cases}$$

15. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^2,$$

con condición $\iint_{\mathbb{R}^2} |u| < \infty$ ($u = 0$ en infinito) donde f es una función que admite transformada de Fourier.

Otras ecuaciones de la Física

16. La ecuación:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

describe las vibraciones verticales de una cuerda infinita, con $u(x, t)$ la función de desplazamientos verticales de la cuerda en la posición x , en el tiempo t . Sean el desplazamiento inicial y velocidad inicial:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\delta u}{\delta t}(x, t) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Resuelva usando Transformadas de Fourier.

17. Hallar la solución de la ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x(L - x) & x \in [0, L] \\ \partial_t u(x, 0) &= 0 & x \in [0, L] \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

utilizando el método de separación de variables.

18. Resolver la ecuación difusión con convección

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & -\infty < x < \infty \\ u(\pm\infty, t) &= 0 & t > 0. \end{aligned}$$

19. Resolver la ecuación de Korteweg-de Vries linealizada

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & -\infty < x < \infty \\ u(\pm\infty, t) &= 0 & t > 0.\end{aligned}$$

20. (*Un poco de mecánica cuántica*) Utilizar la transformada de Fourier para hallar una solución explícita de la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ u &= g & \text{en } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde u y g son funciones a valores complejos y g es de cuadrado integrable.

Otros

21. *Identidades de Plancherel y de Parseval*

Demuestre, usando transformadas de Fourier, las identidades de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \bar{g}(x) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \bar{\hat{g}}(s) ds$$

y la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

(Suponga que las funciones f , g , \hat{f} , \hat{g} decaen suficientemente rápido en infinito de modo que todas las integrales que aparezcan sean convergentes.)

22. *Teorema de Shannon*

Una función f se dice de *banda limitada* en s_0 , si:

$$\hat{f}(s) = 0, \forall s, |s| > s_0 > 0$$

s_0 es llamada *frecuencia de corte*.

Teorema (Shannon): Sea f una función tal que existen su transformada y antitransformada de Fourier, continua y de banda limitada a $|s| \leq s_0$, Entonces:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nL) \frac{\sin s_0(x - nL)}{s_0(x - nL)} \quad L = \frac{\pi}{s_0}$$

Demuéstrelo, usando los siguientes pasos:

i) Considere la familia de funciones $\hat{\phi}_n(s)$ dadas por:

$$\begin{cases} 0 & |s| > s_0 \\ 2s_0^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i n \pi s}{s_0}} & |s| \leq s_0 \end{cases}$$

y demuestre que la Transformada inversa para cada una esta dada por:

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2s_0}}{2\pi} \frac{\sin(s_0 x - n\pi)}{s_0 x - n\pi}$$

ii) Demuestre que la familia $\hat{\phi}_n(s)$ es una familia de funciones ortonormales, es decir, que el producto interno para funciones complejas entre $\hat{\phi}_n(s)$ y $\hat{\phi}_m(s)$ es cero si $n \neq m$ y es uno si $m = n$.

iii) Muestre que la familia $\hat{\phi}_n(s)$ permite escribir la función f como una serie de Fourier, cuyos coeficientes están en función de muestras de la función en intervalos de largo L , y concluya.