Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 10 de Enero de 2012 Tiempo: 3:00 hrs.

# CONTROL 3: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

**Problema 1.**

(a) (**4 puntos**) Usando separación de variables, resuelva el siguiente modelo para $u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 && 0 < x < \pi,\ \ t \geq 0\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 && t \geq 0\\
&u(x,0) = \begin{cases} \pi/2 - x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases} &&\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 && 0 < x < \pi.
\end{aligned}$$

(b) (**2 puntos**) ¿Como cambia la solución, si sólo modificamos la condición inicial por

$$u(x,0) = \cos^2(x) \quad 0 < x < \pi \ \ ?$$

Indicación: Recuerde que $\cos^2\theta = (1+\cos(2\theta))/2$ y $\operatorname{sen}^2\theta = (1-\cos(2\theta))/2$.

**Problema 2.**

Usando separación de variables resuelva la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
u_{tt} + u_x - c^2 u_{xx} = 0 &\qquad 0 < x < l, \quad t > 0\\
u(x,0) = \phi(x);\ u_t(x,0) = \psi(x) &\qquad 0 \leq x \leq l\\
u(0,t) = 0;\ u(l,t) = 0 &\qquad t > 0
\end{aligned}$$

donde $\phi$ y $\psi$ son funciones dadas.

Notación: Los subíndices en $u$ indican derivadas parciales. Por ejemplo, $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$.

**Problema 3.**

(a) (**2 puntos**) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dos funciones integrables y continuas. Demuestre, usando la transformada de Fourier, la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s)\overline{\hat{g}(s)}\,ds.$$

Indicación: Puede asumir hipótesis adicionales sobre $f$ y $g$ si es necesario.

(b) (**1 punto**) De lo anterior deduzca la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(s)|^2\,ds.$$

(c) (**3 puntos**) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Calcule la transformada de Fourier de $f$. Deduzca que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(s)}{s^2}\,ds = \pi.$$

Nota: Los distintos **problemas** del control deben ser entregados en hojas separadas.

① Buscar soluciones no triviales (no nulas) de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$

ⓐ Reemplazando en la ecuación obtenemos (ordenar)

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = \text{cte}$$ , llamar $-\lambda$ esta cte (o $\lambda$ si se prefiere)

ⓑ Condiciones de borde

CB

0.5

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) \Rightarrow X'(0) = 0 \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = X'(\pi)T(t) \Rightarrow X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

ⓒ Buscar valores de $\lambda$ que entreguen $X$ no nula, solución de

problema para X

0.2

$$\begin{cases} X'' = -\lambda X \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

C.1 $\lambda < 0$ solo entrega $X \equiv 0$. Se descarta

C.2 $\lambda = 0$ $X'' = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b$

$X'(x) = a$ $X'(0) = X'(\pi) = 0 \Rightarrow a = 0$

$X(x) = b$ sirve

C.3 $\lambda > 0$ da solución general

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x) + B \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$$

luego $X'(x) = A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x) - B\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x)$

$X'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

Tema:
Fecha:
Recordar:

$X'(\pi) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\sqrt{\lambda}\cdot\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi$

$k = 1, 2, \ldots$

En resumen

$\lambda_k = k^2 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

$X_0$

0.2 $X_0(x) = 1$ (o cualquier cte no nula)

$X_k$

0.6 $X_k(x) = \cos(kx) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

(d) Encontrar las funciones $T(t)$.

resolver para $T_k$ $T'' = -\lambda \alpha^2 T$
$= -k^2\alpha^2 T$

0.5

sol. General $T_k(t) = C_k \cos(k\alpha t) + D_k \,\text{sen}(k\alpha t)$

y $T_0(t) = C_0 + D_0 t$

(e) Por principio de superposición / linealidad / Fourier ...

buscar solución de la forma

$$u(x\,t) = 1\cdot(C_0 + D_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)\left[C_k \cos(k\alpha t) + D_k \,\text{sen}(k\alpha t)\right]$$

(f) Imponemos las condiciones iniciales $(t=0)$

(f.1) $$u(x,0) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(kx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x\,t) = D_0 + \sum \cos(kx)\left[-C_k \cdot k\alpha\, \text{sen}(k\alpha t) + D_k\, k\alpha \cos(k\alpha t)\right]$$

(f.2) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 = D_0 + \sum \cos(kx)\, D_k \cdot k\alpha$$

Tema:

Fecha:

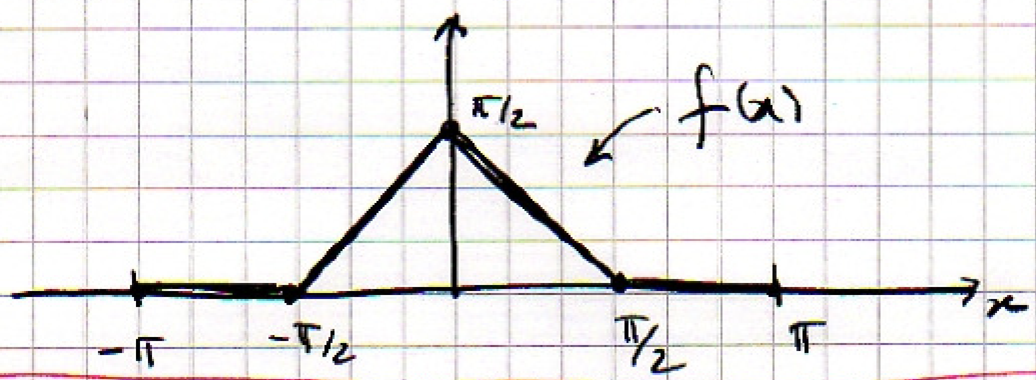
Recordar:

de (f·2) concluimos $D_0, D_k = 0$ 0.5

de (f·1) concluimos los $C_k$ son 0.5

los coeficientes de Fourier de la serie de cosenos de la condición inicial.

Considerar la extensión par a $[-\pi, \pi]$ de la condición inicial para que su serie de Fourier solo requiera cosenos




Para los coeficientes, pueden aprovecharse las relaciones de ortogonalidad,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \pi & k = m \end{cases}$$

Ojo, para $k=0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx = 2\pi$$

Por eso, usualmente la serie de Fourier aparece como

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kx)$$

Usare la ortogonalidad,

con $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx$

<u>Calculo de Co</u>

$$(C_0, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} C_0 \cdot 1 \cdot dx = 2\pi C_0$$

$$= (f, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{\pi}{8}}$$

0.2

por el Co correcto

Calculo de $C_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$(f, \cos kx) = \left(C_0 + \sum_{k'} C_{k'} \cos(k'x), \cos kx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = C_k (\cos kx, \cos kx) = \pi C_k$$

$$\Rightarrow C_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx$$

$f(x)$ par $\quad C_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx\,dx$

$f(x)$ nula en $[\pi/2, \pi)$ $\quad = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos kx\,dx$

vale $\frac{\pi}{2} - x$ en $[0\ \pi/2]$ $\quad = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos kx\,dx$

Tema:
Fecha:
Recordar:

$$C_k = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cos kx\,dx}_{I_k} - \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \cos kx\,dx}_{J_k}$$

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \cos kx\,dx = \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$J_k = \frac{2}{\pi}\, x \cdot \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin kx}{k}\,dx$$

$$= \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\left.\left(\frac{-\cos kx}{k^2}\right)\right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2}\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(0)\right)$$

0,6 por los Ck correctos

$$C_k \overset{*}{=} I_k - J_k = \frac{2}{\pi k^2}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

(Opcional, $k$ par $= 2n$ $\quad \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

$k$ impar $= 2n+1$ $\quad \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ )

Solución

$$u(x,t) = \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{2}{\pi k^2}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)\right\} \cos(kx)\cos(k2t)$$

0.2 formula final

Parte (b)

$$u(x,0) = \cos^2(x)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$ (indicación)

2 puntos

Comparar ambas expresiones

$$= C_0 + \sum C_k \cos kx$$

$$\Rightarrow \quad C_0 = \frac{1}{2} \qquad C_2 = \frac{1}{2}$$ y el resto es nulo

Solución es ahora

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\cos(2\alpha t)$$

//

Pauta P2

Resolver la siguiente EDP usando el método de separación de variables:

$$(1)\quad u_{tt} + u_x - c^2 u_{xx} = 0; \quad x \in (0,\ell),\ t>0$$

$$\left.\begin{aligned} (2)\quad & u(x,0) = \phi(x) \\ (3)\quad & u_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned}\right\} x \in [0,\ell]$$

$$(4)\quad u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad t>0.$$

Solución: suponer $u(x,t) = X(x)T(t)$

de (1) obtenemos:

$$-\frac{T''}{T} = \frac{X' - c^2 X''}{X} = \lambda \quad \text{con } \lambda \text{ constante} \qquad |0,5|$$

luego usando (4) tenemos

$$\begin{cases} c^2 X'' - X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$$

ansatz: $X(x) = e^{mx} \Rightarrow \begin{cases} X'(x) = m e^{mx} \\ X''(x) = m^2 e^{mx} \end{cases}$

$$\therefore (c^2 m^2 - m + \lambda) e^{mx} = 0 \Rightarrow p(m) = c^2 m^2 - m + \lambda = 0$$

luego $m_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda c^2}}{2c^2}$ $\quad |0,5|$

$$\therefore X(x) = A e^{m_1 x} + B e^{m_2 x}$$

$$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$X(\ell) = A e^{m_1 \ell} - A e^{m_2 \ell} = 0$$

dos casos: i) $m_1$ y $m_2$ son reales (ie $\Delta = 1-4c^2\lambda \geq 0$)

ii) $m_1$ y $m_2$ son complejas y conjugadas.

(ie $\Delta = 1-4c^2\lambda < 0$). (0,5)

Si ocurre i) entonces (descartando $A=0$)

$$e^{m_1 l} - e^{m_2 l} = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2$$

$\therefore$ X es la función nula, luego (0,5)

descartamos i).

$\therefore$ nos quedamos con el caso ii)

$$m_1 = \frac{1}{2c^2} + i\frac{\sqrt{4c^2\lambda - 1}}{2c^2} =: a+bi$$

$$m_2 = \overline{m_1} = a - bi.$$

$$\therefore X(x) = e^{ax}(Ae^{bix} + Be^{-bix})$$

$$X(0) = A + B = 0$$

$$X(l) = e^{bil} - e^{-bil} = 2\sin bl = 0$$

$$\therefore b = \frac{\pi k}{l} = \frac{\sqrt{4c^2\lambda - 1}}{2c^2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{4c^4\pi^2k^2}{l^2} = 4c^2\lambda_k - 1$$

$$\therefore \lambda_k = \frac{c^2\pi^2k^2}{l^2} + \frac{1}{4c^2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (0,7)$$

$k=0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4c^2} \Rightarrow \Delta = 0$ caso descartado

el término $k^2$ nos permite considerar $k=1,2,3\ldots$

luego

$$X_k(x) = e^{x/(2c^2)} \sin \frac{\pi k}{l} x \quad , \; k = 1,2,3,\ldots \qquad (0{,}5)$$

solución de T:

dado que $\lambda > 0$ tenemos

$$T(t) = A \cos\sqrt{\lambda}\, t + B \sin\sqrt{\lambda}\, t$$

llamemos $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} = \left( \frac{c^2\pi^2k^2}{l^2} + \frac{1}{4c^2} \right)^{1/2}$

luego

$$T_k(t) = A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t . \qquad (0{,}7)$$

Luego

$$u(x,t) = e^{x/(2c^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k x}{l} \left( A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t \right). \qquad (0{,}5)$$

Debemos encontrar $A_k$ y $B_k$, para ello usamos (2) y (3), en efecto

$$u(x,0) = e^{x/(2c^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k x}{l} A_k = \phi(x)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \phi(x)\, e^{-x/(2c^2)} .$$

luego $A_k$ corresponde a los coeficientes de Fourier de la expansión en seno de la función $\phi(x) e^{-x/(2c^2)}$, es decir

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \phi(x) e^{-x/(2c^2)} \sin \frac{\pi k x}{\ell} \, dx \quad (0{,}8)$$

Por otro lado

$$u_t(x,0) = e^{x/(2c^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k x}{\ell} B_k \omega_k = \psi(x)$$

$$\therefore \quad B_k = \frac{2}{\omega_k \ell} \int_0^\ell \psi(x) e^{-x/(2c^2)} \sin \frac{\pi k x}{\ell} \, dx \quad (0{,}8)$$

__Obs__:

0,5 Encontrar las ecuaciones para X y T

0,5 Encontrar las raíces del polinomio característico de la ecuación para X.

0,5 Separar caso i) $\Delta \geq 0$ ii) $\Delta < 0$

0,5 descartar caso i)

0,7 encontrar $\lambda_k \; \forall k \in \mathbb{Z}$

0,5 descartar $k \leq 0$ y expresar $X_k$

0,7 resolver la ecuación para T y expresar $T_k$

0,5 Expresar $u(x,t)$

0,8 Encontrar $A_k$

0,8 Encontrar $B_k$

1.- Solución:

(i)

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\,\overline{\hat{g}(s)}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,e^{-isx}\,dx}\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\,e^{isx}\,ds\,dx \quad 1.0$$

Teo. de la inversión

$$\overset{0.5}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\,\check{\hat{f}}(x)\,dx \overset{0.5}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\,f(x)\,dx$$

(b) Tomando $g = f$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2\,ds \quad 1.0$$

(ii) $$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-isx}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-isx}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-isx}}{-is}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-is}-e^{is}}{-is} \quad 1.0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\operatorname{sen}(s)\,(-2i)}{-is} = \frac{2\operatorname{sen}(s)}{\sqrt{2\pi}\,s} \quad 0.5$$

identificar la expresión con sen(·)

... usando Parseval: 0.5

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}^2(s)}{2\pi \cdot s^2} ds$$

$$\parallel$$

$$\int_{-1}^{1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}^2(s)}{2\pi s^2} ds$$

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(s)}{s^2} ds \quad //$$

1.0 (por el desarrollo final y llegar a la solución)