# CONTROL 3, MA2002

JAIME GONZÁLEZ & JAIME ORTEGA

## Problema 1

1. Sea $\alpha > 0$ y considere la integral siguiente:

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + 2\cos\theta \ \mathrm{sen}\theta} d\theta.$$

   a) Demuestre que $I(\alpha)$ se puede calcular mediante el método de los residuos si $\alpha > 1$.
   **(1,5 ptos.)**

   b) Calcule el valor de la integral $I$ para $\alpha = \sqrt{2}$.
   **(1,5 ptos.)**

2. Calcule, utilizando residuos la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} dx,$$

   donde $a, b > 0$.
   **(3 ptos.)**

## Problema 2

Consideremos el siguiente problema.
Sea $L > 0$ y consideremos la Ecuación Diferencial Parcial No Homogénea siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= L, && 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\
u(0,y) = u(1,y) &= 0, && 0 < y < 1 \\
u(x,0) &= \frac{Lx(x-1)}{2}, && 0 < x < 1 \\
u(x,1) &= \frac{Lx^2}{2}, && 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

1. Muestre que el problema anterior no es posible resolverlo directamente utilizando el Método de Seoaración de Variables. Justifique su respuesta.
   **(0,5 ptos.)**

2. Consideremos el siguiente cambio de variables

$$v(x,y) = u(x,y) + f(x),$$

*Date*: 8 de Julio de 2010.

donde $u(x,y)$ es solución del problema anterior. Muestre que existe una función $f(x)$, tal que $v(x,y)$ es solución del problema siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, && 0<x<1,\ 0<y<1\\
v(0,y)=v(1,y) &= 0, && 0<y<1\\
v(x,0) &= 0, && 0<x<1\\
v(x,1) &= \frac{Lx}{2}, && 0<x<1.
\end{aligned}$$

el cual podemos resolver utilizando el Método de Separación de Variables.

**(2,5 ptos.)**

3. Resuelva el problema anterior para $v(x,y)$ y encuentre la solución $u(x,y)$.

**(3 ptos.)**

**Ind:** Para la aplicación del método de separación de variables considere solamente el caso $\lambda = k^2 > 0$ y encuentre los correspondientes coeficientes de la serie de Fourier obtenida.

**Problema 3**

1. Considere la función
$$f(x) = 1-x, \quad 0 \le x < 1.$$
   a) Entonces encuentre y grafique las extensiones par e impar de $f$ al intervalo [-1,1].
   **(1 ptos.)**
   b) Encuentre las series de Fourier asociadas a la extensión par e impar de la función $f$.
   **(2 ptos.)**
2. En el siguiente problema estudiaremos la unicidad de soluciones del problema siguiente. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, acotado, simplemente conexo y regular. Entonces consideremos la ecuación
$$\left.\begin{aligned} -\triangle u &= f, && \text{en } \Omega\\ u &= g, && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}\right\} (P)$$
donde $f$ y $g$ son funciones regulares. Veamos que existe una única solución para este problema. Para ello consideremos los siguientes pasos.
   a) Recordando que
$$\triangle\varphi = \text{div } (\nabla\varphi),$$
   muestre que dados dos campos escalares $\phi$ y $\varphi$, entonces

(1) $$\text{div } (\phi\nabla\varphi) = \nabla\phi\cdot\nabla\varphi + \phi\triangle\varphi.$$

   **(1 ptos.)**
   b) Suponga que $u_1$ y $u_2$ son soluciones del problema $(P)$, entonces determine que problema verifica la función $v = u_1 - u_2$.
   **(1 ptos.)**
   c) Muestre que
$$\int_\Omega v\triangle v = \int_\Omega |\nabla v|^2 = 0.$$
   y concluya que $v = 0$. De lo anterior obtenga la unicidad de soluciones del problema $(P)$.
   **(1 ptos.)**