PAUTA CONTROL 1
CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES, 2015/2

Prof. J. Dávila, Aux: J. Marshall, S. Pérez

1. (a) Para la superficie S dada por $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, calcule

$$\iint_S \frac{x^2}{z}\, dA.$$

(b) Calcular el flujo del campo

$$F(x, y, z) = (xy + e^{y^2}, y^2 + z, y - y^2 - 2)$$

a través de la superficie

$$x^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 2 - z.$$

Solución.
(a) Parametrizamos S mediante

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_r &= (\cos\theta, \sin\theta, 2r) \\ \varphi_\theta &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_r \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2r^2\cos\theta i - 2r^2 \sin\theta j + kr \end{aligned}$$

y

$$\|\varphi_r \times \varphi_\theta\| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}$$

Así

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{x^2}{z}\, dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(r\cos\theta)^2}{r^2} r\sqrt{4r^2+1}\, d\theta dr \\ &= \int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\, dr &= \frac{2}{3}\frac{1}{8}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\, d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iint_S \frac{x^2}{z}\, dA = \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1)\pi.$$

(b) Usaremos el teorema de Gauss:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F$$

con

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 < 1,\ 0 < y < 2 - z\}.$$

Así $\partial\Omega$ contiene la superficie S. Más precisamente

$$\partial\Omega = S \cup S_1 \cup S_2$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 : &\quad x^2 + z^2 = 1,\ y = 0 \\ S_2 : &\quad x^2 + z^2 = 1,\ y = 2 - z. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + e^{y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(y - y^2 - 2\right) \\ &= 3y. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot F = 3 \iiint_{\Omega} y\, dV.$$

Usaremos las siguientes coordenadas para calcular la integral:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad 0 \le r < 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$0 < y < 2 - r\sin\theta.$$

El elemento de volumen es

$$r\, dr\, d\theta\, dy.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F = 3 \iiint_{\Omega} y\, dV & \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2 - r\sin\theta} yr\, dydrd\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 y^2 \Big|_0^{2 - r\sin\theta} r\, dydrd\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r\sin\theta)^2 r\, dydrd\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r - 4r^2\sin\theta + r^3\sin^2\theta)\, drd\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (2r^2 - \frac{4}{3}r^3\sin\theta + \frac{1}{4}r^4\sin^2\theta)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (2 - \frac{4}{3}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (2 - \frac{4}{3}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{3}{2}(4\pi + \frac{1}{4}\pi) \\ &= \frac{51\pi}{8}. \end{aligned}$$

Calculamos la integral sobre S_1. En esta superficie la normal unitaria exterior es $\hat{n} = -j = (0, -1, 0)$. Sobre esta superficie

$$F \cdot \hat{n} = -z$$

y usando coordenadas polares en las variables x, z

$$\iint_{S_1} F \cdot \hat{n} = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sin\theta r \, d\theta dr = 0.$$

Calculamos la integral sobre S_2. En esta superficie la normal unitaria exterior es $\hat{=}(0,1,1)/\sqrt{2}$. Sobre esta superficie

$$F \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(y^2 + z + y - y^2 - 2\Big) = 0$$

luego

$$\iint_{S_2} F \cdot \hat{n} = 0.$$

Luego

$$\iint_S F \cdot \hat{n} = \iint_\Omega \nabla \cdot F = \frac{51\pi}{8}.$$

2. (a) (3 ptos) Use el teorema de Stokes para calcular la integral

$$\oint_\Gamma (\sin(x^2)dx + xy^2dy + xz^2dz)$$

donde Γ es la línea poligonal que une los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ y $(0,0,0)$.

(b) (3 ptos) Verifique que el campo

$$F(x,y,z) = \Big(-2\cos(x)\sin(x)e^{\cos(x)^2}\sin(xz+y^2) + e^{\cos(x)^2}\cos(xz+y^2)z, \\ 2e^{\cos(x)^2}\cos(xz+y^2)y, e^{\cos(x)^2}\cos(xz+y^2)x\Big)$$

es conservativo y calcule la integral

$$\int_\Gamma F \cdot \vec{dr}$$

donde Γ tiene parametrización:

$$\gamma(t) = \big((2+\sin(20t))\sin(t), (2+\sin(20t))\cos(t), \cos(20t)\big), \quad t \in [0,\pi].$$

Solución.

(a) El campo a evaluar es $F(x,y,z) = \sin(x^2)\,\hat{\imath} + xy^2\,\hat{\jmath} + xz^2\,\hat{k}$ el cual tiene rotor

$$\nabla \times F = -z^2\,\hat{\jmath} + y^2\,\hat{k}.$$

Para aplicar el teorema de Stokes se necesita que el campo sea suficientemente diferenciable, lo cual F cumple, y una superficie S que que tenga frontera Γ y su normal coincida con la positividad de Γ. Sea S la superficie compuesta por la unión de S_1 y S_2 donde cada una esta definida por

$$S_1 = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le x,\ z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) : x = y,\ 0 \le x \le 1,\ 0 < z \le x\}$$

Entonces $\partial S = \Gamma$ y por lo tanto usando el teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS\end{aligned}$$

Se realiza el cálculo de de estas integrales por separado. La superficie S_1 se parametriza como

$$\varphi_1(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$$

la normal de esta superficie es

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \hat{k}$$

que coincide con la orientación positiva de Γ (en caso de obtener una normal $-\hat{k}$ se multiplica el flujo por -1). Realizando el cálculo del flujo a través de S_1 se obtiene que

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS &= \int_0^1 \int_0^x y^2\,\hat{k} \cdot\ \hat{k} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x y^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{y^3}{3} dx \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Para S_2 se considera la siguiente parametrización

$$\varphi_2(x,z) = x\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \quad 0 \le x \le 1 0 \le z \le x$$

la normal de esta superficie es

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \times \hat{k} = \hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

nuevamente esta normal coincide con la positividad de Γ y por lo tanto el flujo a través de S_2 es

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS &= \int_0^1 \int_0^x (-z^2 \hat{\jmath} + x^2 \hat{k}) \cdot (\hat{\imath} - \hat{\jmath}) dz dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x z^2 dz dx \\
&= \int_0^1 \frac{z^3}{3} dx \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el trabajo realizado en Γ es $1/6$.

(b) Se puede calcular $\nabla \times F$ para probar que F es conservativo, sin embargo esto no ayuda mucho a la hora de realizar el cálculo del trabajo. En vez de calcular el rotor vamos a encontrar el potencial de F. Sea f el candidato a potencial de F, entonces de $\nabla f = F$ se obtienen 3 igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2\cos(x)\sin(x)e^{\cos(x)^2}\sin(xz + y^2) + e^{\cos(x)^2}\cos(xz + y^2)z \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2e^{\cos(x)^2}\cos(xz + y^2)y \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= e^{\cos(x)^2}\cos(xz + y^2)x
\end{aligned}$$

integrando la última igualdad se obtiene $f(x, y, z) = e^{\cos(x)^2}\sin(xz + y^2) + g(x, y)$ y derivando esta f en x e y se obtiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

así g es una constante que por comodidad supondremos 0. Entonces $f(x, y, z) = e^{\cos(x)^2}\sin(xz + y^2)$ es potencial de F pues $\nabla f = F$ lo que prueba que F es conservativa.

Para el cálculo del trabajo basta calcular el punto inicial y final de la curva

$$\begin{aligned}
\gamma(\pi) &= (0, -2, 1) \\
\gamma(0) &= (0, 2, 1)
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} &= f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) \\ &= f(0,-2,1) - f(0,2,1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Observaciones :
(i) La curva γ NO es cerrada, quien haya concluido que el trabajo es nulo argumentando por curva cerrada tiene el resultado malo y por ende no tiene puntaje.
(ii) Proponer un potencial f y mostrar que $\nabla f = F$ también es correcto.

■