MA26B Matemáticas Aplicadas
Control 3 - Semestre 2005-2

17 de Noviembre de 2005

Profs.: Carlos Conca R.
Jorge San Martín H.

Problema 1.

a) Considere la integral real

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta}d\theta.$$

i) Como $z=e^{i\theta}$ entonces $dz=izd\theta$. Además

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\frac{\left(z^2+1\right)^2}{4z^2}+\frac{\left(z^2-1\right)^2}{4z^2}\\ &= \frac{z^4+1}{2z^2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}5-4\operatorname{sen}\theta &= 5-2\frac{z^2-1}{iz}\\ &= \frac{2+5iz-2z^2}{iz}.\end{aligned}$$

De este modo, la integrál se transforma en

$$\begin{aligned}I &= \int_\Gamma \frac{z^4+1}{2z^2}\cdot\frac{iz}{2+5iz-2z^2}\cdot\frac{dz}{iz}\\ &= \int_\Gamma \frac{z^4+1}{2z^2\left(2+5iz-2z^2\right)}\cdot dz,\end{aligned}$$

donde Γ es el circulo de radio 1 centrado en el origen, recorrido en el sentido antihorario.

ii) Los polos de $f(z)$ se obtienen como los ceros del denominador:
Primero: $z=0$ es un polo de orden 2.
Además: $2+5iz-2z^2=0$ cuando

$$\begin{aligned}z &= \frac{-5i\pm\sqrt{-25+16}}{-4}\\ &= \frac{5i\pm 3i}{4}.\end{aligned}$$

por lo tanto $z=2i$ y $z=i/2$ son polos de orden 1.

iii) Usando el teorema de los residuos de Cauchy se tiene que

$$I = 2\pi i \left\{ \mathrm{res}(f,0) + \mathrm{res}(f,i/2) \right\}.$$

El residuo en zero es

$$\begin{aligned} \mathrm{res}(f,0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 f(z) \right) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^4+1}{2\left(2+5iz-2z^2\right)} \right) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{4z^3\left(2+5iz-2z^2\right) - \left(z^4+1\right)(5i-4z)}{2\left(2+5iz-2z^2\right)^2} \\ &= \frac{0-(1)(5i)}{2(2)^2} = -\frac{5}{8} i. \end{aligned}$$

El residuo en $i/2$ es

$$\begin{aligned} \mathrm{res}(f,i/2) &= \frac{1}{0!} \lim_{z\to i/2} \left(\left(z - \frac{i}{2} \right) f(z) \right) \\ &= \lim_{z\to i/2} \left(\frac{z^4+1}{2z^2(4i-2z)} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{16}+1}{-2\frac{1}{4}(4i-i)} \\ &= \frac{17}{-24i} = \frac{17}{24} i \end{aligned}$$

Con esto, la integral queda

$$I = 2\pi i \left\{ \frac{17}{24} i - \frac{5}{8} i \right\} = -\frac{\pi}{6}.$$

b) Para para calcular la integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2},$$

definimos la función de variable compleja $f(z) = \frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}$, la integramos en el camino $\partial\Omega_R$, donde $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R,\ Im(z) > 0\}$.
La frontera de Ω_R se descompone en dos partes, $\Gamma_R = [-R,R] \times \{0\}$ y $C_R = \partial\Omega_R \cap H^+$.
El teorem a de los residuos dice que

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{p\in H^+} \mathrm{res}(f,p)$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2} = 2\pi i \sum_{p\in H^+} \mathrm{res}(f,p) - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz.$$

Los polos de la función f son $z = \pm 2i$, ambos dobles.
Nos interesa el residuo en $p = 2i$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}(f, 2i) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left((z - 2i)^2 f(z) \right) \\
&= \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z + 2i)^2} \right) \\
&= \lim_{z \to 2i} \frac{-2}{(z + 2i)^3} \\
&= \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{-i}{32}
\end{aligned}$$

El límite de la segunda integral es cero ya que se trata de un cuociente de polinomios donde el denominador tiene grado 4, que es mayor que el grado del numerador +1.
Conclusión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = 2\pi i \cdot \frac{(-i)}{32} = \frac{\pi}{16}.$$

Problema 2. (Puntaje doble)

La EDP que modela las vibraciones de una viga estructural simplemente apoyada es

$$(\mathcal{P}) \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 & \text{para } x \in (0, L) \text{ y } t>0 \\
u(0, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 & (\text{CB en } x = 0) \\
u(L, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 & (\text{CB en } x = L) \\
u(x, 0) = f(x) & \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) &
\end{cases}$$

a) Usanmos el método de separación de variables, en la forma sugerida: $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Reemplazandoe el la EDP de $(\mathcal{P})$ se obtiene

$$\psi''(t)\phi(x) + e^2 \psi(t)\phi^{(4)}(x) = 0.$$

Haciendo el despeje habitual se obtiene que

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -e^2 \frac{\phi^{(4)}(x)}{\phi(x)}.$$

como las variables x y t son independientes, la ecuación anterior solo puede verificarse si ambos lados son iguales a una constante. Sea λ dicha constante, se obtienen dos ecuaciones, una temporal y una espacial

$$\begin{aligned}
\psi''(t) &= \lambda \psi(t) \\
\phi^{(4)}(x) &= -\frac{\lambda}{e^2} \phi(x).
\end{aligned}$$

Para que la ecuación tome la forma del enunciado hacemos el cambio de constante: $\alpha = \dfrac{\lambda}{e^2}$.
Las condiciones de borde se escriben

$$\psi(t)\phi(0) = \psi(t)\phi''(0) = \psi(t)\phi(L) = \psi(t)\phi''(L), \qquad \forall t$$

luego, para que la solución no sea constantemente nula, la función espacial ϕ debe satisfacer las ecuaciones del enunciado. Es decir

$$(\mathcal{P}_{vp}) \begin{cases} \alpha\phi(x) + \phi^{(4)}(x) = 0 & \text{para } x \in (0,L) \\ \phi(0) = \phi''(0) = 0 & (\text{CB en } x = 0) \\ \phi(L) = \phi''(L) = 0 & (\text{CB en } x = L) \end{cases}$$

b) Si $\alpha = 0$, entonces la EDO de $(\mathcal{P}_{vp})$ se reduce a $\phi^{(4)}(x) = 0$, cuya solución es $\phi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, con $\phi''(x) = 2C + 6Dx$. Evaluando las CB en cero se obtiene $A = C = 0$. Evaluando las CB en L se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C + DL &= 0 \\ C + 3DL &= 0, \end{aligned}$$

el cual solo posee solución trivial. Por lo tanto $\phi \equiv 0$.

c) Multiplicamos la EDO del problema $(\mathcal{P}_{vp})$ por $\phi(x)$ e integramos por partes dos veces:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \int_0^L \phi^2(x) + \int_0^L \phi^{(4)}(x)\phi(x)dx \\ &= \alpha \int_0^L \phi^2(x) + \phi^{(3)}(x)\phi(x)\Big|_0^L - \int_0^L \phi^{(3)}(x)\phi'(x)dx \\ &= \alpha \int_0^L \phi^2(x) + \phi^{(3)}(x)\phi(x)\Big|_0^L - \phi^{(2)}(x)\phi'(x)\Big|_0^L + \int_0^L \phi^{(2)}(x)\phi^{(2)}(x)dx. \end{aligned}$$

Usando las CB la expresión anterior queda

$$\alpha \int_0^L \phi^2(x)dx + \int_0^L \left[\phi''(x)\right]^2 dx = 0.$$

d) Si $\alpha > 0$, la relación anterior implica que ambos sumandos deben ser nulos (suma de números ≥ 0 igual a cero) por lo tanto

$$\int_0^L \phi^2(x)dx = 0$$

y como se trata de una función (supuestamente) continua, se obtiene que $\phi \equiv 0$.

e) Hacemos el cambio de variables $\alpha = -a^4$ donde $a > 0$. Con esto la EDO en $(\mathcal{P}_{vp})$ queda

$$\phi^{(4)}(x) = a^4\phi(x)$$

cuyo polinomio caracteristico tiene las raices $\pm ia$ y $\pm a$. Por lo tanto, la solución general es de la forma

$$\phi(x) = A\cosh(ax) + B\operatorname{senh}(ax) + C\cos(ax) + D\operatorname{sen}(ax).$$

Usamos las CB en $x = 0$: queda

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A - C &= 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $A = C = 0$.
Ahora usamos las CB en L: queda

$$\begin{aligned} B\text{senh}(aL) + D\text{sen}(aL) &= 0 \\ B\text{senh}(aL) - D\text{sen}(aL) &= 0, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $B = 0$ y $D\text{sen}(aL) = 0$. Como al imponer $D = 0$ la solución es la trivial, solo se obtienen soluciones NO triviales imponiendo

$$\text{sen}(aL) = 0.$$

Esta ecuación tiene las soluciones clásicas $a = a_n = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Así, las soluciones no nulas de $(\mathcal{P}_{vp})$ son

$$\phi_n(x) = \text{sen}(a_n x), \qquad \text{donde } a_n = \frac{n\pi}{L}.$$

f) La ecuación temporal es

$$\psi''(t) = \lambda\psi(t) = -e^2 a^4 \psi(t)$$

cuya solución general es

$$\psi(t) = A\cos\left(ea^2 t\right) + B\text{sen}\left(ea^2 t\right).$$

Usando esta solución para cada a_n encontrado en (e) se concluye que la $n-$ésima solución de la EDP+CB en el problema $(\mathcal{P})$ es de la forma

$$u_n(x,t) = \left[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\text{sen}(\omega_n t)\right]\text{sen}(a_n x),$$

donde $\omega_n = ea_n^2$ y $a_n = \frac{n\pi}{L}$.

g) Si las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\text{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \\ g(x) &= -7\text{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

entonces la solución del problema $(\mathcal{P})$ es de la forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[A\cos(\omega_4 t) + B\text{sen}(\omega_4 t)\right]\text{sen}(a_4 x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \left[-Aw_4\text{sen}(\omega_4 t) + B\omega_4\cos(\omega_4 t)\right]\text{sen}(a_4 x). \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} A &= 5 \\ B\omega_4 &= -7, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$u(x,t) = \left[5\cos(\omega_4 t) - \frac{7}{\omega_4}\text{sen}(\omega_4 t)\right]\text{sen}(a_4 x).$$

h) En el caso general en que $f(x)$ y $g(x)$ se pueden desarrollar en series de Fourier de senos en $[0,L]$, la solución se busca como la serie

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\omega_n t\right)+B_n\mathrm{sen}\left(\omega_n t\right)\right]\mathrm{sen}\left(a_n x\right).$$

Evaluenado en las condiciones iniciales se obtiene que los coeficientes A_n y $B_n\omega_n$ son los coeficientes de fourier de f y g respectivamente, es decir

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{sen}(a_n x)dx\\ B_n &= \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x)\mathrm{sen}(a_n x)dx.\end{aligned}$$

i) Finalmente, si $f(x)=x(L-x)$ y $g(x)=0$, los coeficientes anteriores son:

$$\begin{aligned}B_n &= 0\\ A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\mathrm{sen}(a_n x)dx, \qquad \text{(por partes)}\quad \begin{array}{ll} u=x(L-x) & du=(L-2x)dx\\ dv=\mathrm{sen}(a_n x) & v=-\frac{1}{a_n}\cos(a_n x)\end{array}\\ &= \frac{2}{L}\left(-\left[x(L-x)\frac{1}{a_n}\cos(a_n x)\right]_0^L+\frac{1}{a_n}\int_0^L(L-2x)\cos(a_n x)dx\right)\\ &= \frac{2}{La_n}\int_0^L(L-2x)\cos(a_n x)dx, \qquad \text{(por partes)}\quad \begin{array}{ll} u=(L-2x) & du=-2dx\\ dv=\cos(a_n x) & v=\frac{1}{a_n}\mathrm{sen}(a_n x)\end{array}\\ &= \frac{2}{La_n}\left(\left[(L-2x)\frac{1}{a_n}\mathrm{sen}(a_n x)\right]_0^L+\frac{2}{a_n}\int_0^L\mathrm{sen}(a_n x)dx\right)\\ &= \frac{4}{La_n^2}\int_0^L\mathrm{sen}(a_n x)dx\\ &= \frac{4}{La_n^3}\left[\cos(a_n x)\right]_L^0\\ &= \frac{4}{La_n^3}\left[1-(-1)^n\right]=\frac{4L^2}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(x,t)=\frac{4L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right)\cos\left(\omega_n t\right)\mathrm{sen}\left(a_n x\right).$$