Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.

Profs.: F. Álvarez., R. Cominetti,
J. Dávila, H. Ramírez C.

Santiago, 19 de noviembre de 2009.

Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 3: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

(a) (2.0 pts.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable con $x \mapsto xf(x)$ una función integrable en $\mathbb{R}$. Muestre que, formalmente, $\mathcal{F}(xf(x))(s) = i\frac{d}{ds}[\mathcal{F}(f(x))(s)]$, $s \in \mathbb{R}$, donde $\mathcal{F}(\cdot)$ denota la transformada de Fourier. Use esta propiedad para encontrar $\mathcal{F}(x^2 e^{-x^2/2})(s)$.

(b) (4.0 pts.) Sea $F(s) = \mathcal{F}(f(x))(s)$, $s \in \mathbb{R}$, la transformada de Fourier de una función $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, que suponemos integrable. Demuestre la fórmula de modulación

$$\mathcal{F}[f(x)\operatorname{sen}(s_0 x)](s) = \frac{1}{2i}[F(s - s_0) - F(s + s_0)].$$

Aplique esta propiedad, junto con técnicas de evaluación de integrales impropias usando residuos, para encontrar la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ con } a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ constantes.}$$

Problema 2.

(a) (3 pts.) Encuentre la serie de Fourier <u>en senos</u> de la función f dada en $[0, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi/2, \\ 2 & \text{si} \quad \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Discuta la convergencia puntual de dicha serie en relación al valor de $f(x)$ para cada $x \in [0, \pi]$.
Indicación: Puede ser útil extender apropiadamente $f(x)$ para $-\pi \le x < 0$.

(b) (3 pts.) La temperatura $u = u(t, x)$ de una barra aislada de longitud $L = \pi$ compuesta por un material homogéneo e isótropo de coeficiente de difusividad térmica $\alpha = 2$, satisface la siguiente EDP

$$u_t = 2u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$

bajo las condiciones de borde

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{y} \quad u(t, \pi) = \pi, \quad t > 0,$$

junto con la condición inicial

$$u(0, x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2, \\ 3/2 + x & \text{si} \quad x = \pi/2 \\ 2 + x & \text{si} \quad \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

Encuentre una expresión en serie infinita para la distribución de temperatura $u(t, x)$.
Indicación: Considere $y(t, x) = u(t, x) - x$, y escriba la EDP, las CB y la CI satisfechas por esta función auxiliar $y(t, x)$ a partir de lo que se sabe sobre $u(t, x)$. Para encontrar $y = y(t, x)$ puede usar directamente una solución en serie infinita de acuerdo a lo visto en cátedra.

Problema 3. Sean α, β, c y L constantes positivas que satisfacen $\alpha^2 L^2 < 4(\beta L^2 + c^2\pi^2)$. Usando separación de variables, resuelva la *ecuación del telégrafo*

$$u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = c^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L,$$

con las condiciones

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0$$

y

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad 0 \le x \le L.$$

La solución debe quedar expresada en términos de los datos del problema: α, β, c, L y la función $f(x)$.

PAUTA C3 - MA2002 - 2009

P1)

(a) Recordemos la definición de la T. de Fourier: $\mathcal{F}(f(x))(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-isy}dy$ (0.5)

Formalmente, podemos derivar e intercambiar con la integral:

$$\frac{d}{ds}\left[\mathcal{F}(f(x))(s)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left[f(y)e^{-isy}\right]dy = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) e^{-isy}dy$$

$$= -i\,\mathcal{F}(x f(x))(s),\quad (0.5)$$

de donde se deduce la propiedad multiplicando por i.

(0.5) Sabemos que $\mathcal{F}(e^{-x^2/2})(s) = e^{-s^2/2}$. Por lo tanto, usando lo anterior:

- $\mathcal{F}(xe^{-x^2/2})(s) = i\frac{d}{ds}e^{-s^2/2} = -ise^{-s^2/2}$.
- $\mathcal{F}(x^2e^{-x^2/2})(s) = i\frac{d}{ds}\left[-ise^{-s^2/2}\right] = e^{-s^2/2} - s^2e^{-s^2/2} = (1-s^2)e^{-s^2/2}$ (0.5)

(b) Recordemos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right]$, por lo tanto (0.3)

$$\mathcal{F}(f(x)\operatorname{sen}(s_0x))(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{2i}\left[e^{is_0y} - e^{-is_0y}\right]e^{-isy}dy$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i(s-s_0)y} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i(s+s_0)y}dy\right]$$

(0.3)

$$= \frac{1}{2i}\left[F(s-s_0) - F(s+s_0)\right].$$

Ahora queremos encontrar la T. de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)g(x)$ donde $g(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}$, $a>0$ y $b>0$.

Por lo visto anteriormente: $s_0 = \pi$ y tenemos

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2i}\left[\hat{g}(s-\pi) - \hat{g}(s+\pi)\right] \qquad (0.3)$$

Notemos que $g(x) = \dfrac{1}{P(x)}$ con $P(x) = (x+ia)(x-ia)(x+b)(x-b)$ tiene grado $P = 4 > 0$.

de modo que g tiene 4 polos simples, 2 reales y 1 con parte imaginaria estrictamente positiva. Luego, para $s<0$, por los teoremas de integración usando residuos tenemos (0.5)

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-isy}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\underbrace{2\pi i \operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; ia)}_{(0.3)} + \pi i\Big(\operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; b) + \operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; -b)\Big)\Big] \quad (0.3)$$

Como los polos son simples, tenemos que

$$\operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; ia) = \frac{e^{+as}}{2ai(ai-b)(ai+b)} = \frac{+ie^{as}}{2a(a^2+b^2)} \qquad (0.3)$$

$$\operatorname{Res}(\,\%\,; \pm b) = \pm\frac{e^{\mp ibs}}{2b(a^2+b^2)} \qquad (0.3)$$

Luego

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-\cancel{2}\pi e^{as}}{\cancel{2}a(a^2+b^2)} + \frac{\pi i}{2b(a^2+b^2)}\left[e^{-isb} - e^{isb}\right]\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{-e^{as}}{a} + \frac{\operatorname{sen}(bs)}{b}\right] \qquad \text{para } s<0 \ (0.3)$$

La fórmula funciona para $s=0$ pues el único residuo que sobrevive es el de ia (la suma de los residuos reales da 0). (0.5)
Para $s>0$ podemos reemplazar en lo anterior por $-s$ (esto porque $\hat{g}(s)$ es real, tb. se pueden ocupar argumentos de cambio de variable o tomar el polo imaginario opuesto).

Así

$$\hat{g}(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{e^{-a|s|}}{a} + \frac{\operatorname{sen}(b|s|)}{b}\right], \quad s\in\mathbb{R} \quad (0.3)$$

Finalmente

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{e^{-a|s+\pi|} - e^{-a|s-\pi|}}{a} + \frac{\operatorname{sen}(|s+\pi|b) - \operatorname{sen}(|s-\pi|b)}{b}\right] \quad (0.3)$$

Observaciones:

P1 (a)

0.5 por escribir correctamente la definición de la T. de Fourier.

0.5 por derivar formalmente intercambiando con la integral.

0.5 por conocer la T. de F. de $e^{-x^2/2}$

0.5 por aplicar correctamente, usando la propiedad.

P1 (b)

0.3 por conocer la expresión compleja del seno.

0.3 por sustituir correctamente en la definición de T. de F.

0.3 por identificar correctamente s_0 y $g(x)$.

0.5 por describir la estructura de g para aplicar residuos

0.3 por usar correctamente la fórmula para el polo imaginario

0.3 por usar " la fórmula de "semi-residuo" para los polos reales.

0.3 por el residuo del polo imaginario

0.3 por los residuos de los polos reales (por ambos, son análogos).

0.3 por simplificar y factorizar adecuadamente

0.5 por discutir los casos $s=0$ y $s>0$

0.3 por dar la fórmula general para $s\in\mathbb{R}$.

0.3 por sustituir en la fórmula de modulación

PAUTA C3 - MA2002 - 2009

P2

(a) Para obtener la serie de senos de f en $[0,\pi]$, basta extenderla de forma impar $\bar{f}(x) = -f(-x)$ para $x \in [-\pi, 0[$ y encontrar la serie de Fourier de $\bar{f}$ en $[-\pi,\pi]$. (0.5)

Se obtiene entonces que

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad (0.5)$$

con $$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx \quad \text{para } L = \pi. \qquad (0.5)$$

Aquí

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(kx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 2\operatorname{sen}(kx)\,dx \qquad (0.3)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot -\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-1}{k}\cos(kx)\Big|_{x=\pi/2}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left[1-\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + 2\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right]\right] \qquad (0.3)$$

$$\Rightarrow \boxed{b_k = \frac{2}{k\pi}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + 1 - 2(-1)^k\right]} \quad (*)$$

Por los teoremas vistos en cátedra, la serie converge a $f(x)$ ahí donde es diferenciable (y que en este caso la derivada es 0) (0.3) mientras que en los extremos y los puntos de discontinuidad, la serie converge al punto medio del salto, es decir

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < \pi/2 \text{ y } \pi/2 < x < \pi \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = \pi/2 \qquad (0.3) \\ 0 & \text{si } x = 0,\ x = \pi \qquad (0.3) \end{cases}$$

P2)

(b) Tomemos $y(t,x) = u(t,x) - x$. Tenemos que

$$y_t = u_t\ ,\ y_x = u_x - 1\ \text{ y }\ y_{xx} = u_{xx} \qquad (0.5)$$

luego

$$y_t = u_t = \alpha u_{xx} = \alpha y_{xx}\ ,\ t>0,\ 0<x<\pi \quad (0.3)$$

Además

$$\begin{aligned} y(t,0) &= u(t,0) = 0 \\ y(t,\pi) &= u(t,\pi) - \pi = \pi - \pi = 0 \end{aligned} \qquad (0.3)$$

y asimismo

$$y(0,x) = u(0,x) - x = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<\pi/2 \\ \frac{3}{2} & x = \pi/2 \\ 2 & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases} \qquad (0.3)$$

Por lo tanto, y satisface la EDP del calor homogénea,
(0.3) con CB de tipo Dirichlet homogéneas y con condición inicial, esta última está dada por el límite puntual de la serie de senos de la parte (a).

Sabemos que

$$(0.5) \qquad y(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\, e^{-\alpha\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\ ,\ 0<x<L,\ t>0$$

con $\alpha = 2$ y $L = \pi$ en este caso. En $t=0$ obtenemos una
(0.5) serie de senos para la condición inicial, por lo tanto los coeficientes b_k son los ya calculados anteriormente.

En conclusión

$$(0.3)\quad u(t,x) = x + y(t,x) = x + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\, e^{-2k^2 t} \operatorname{sen}(kx),\ t>0,\ 0<x<\pi.$$

con b_k dados por $(*)$

Observaciones:

P2 | (a)

0.5 por indicar que la extensión correcta es la impar

0.5 por expresar la serie de senos.

0.5 por expresar los coeficientes (usando o no paridad).

0.3 por separar las integrales e integrar correctamente.

0.3 por desarrollar y simplificar.

0.3 por identificar que $S_f(x) = f(x)$ ahí donde f es diferenciable.

0.3 por el límite puntual en $x = \pi/2$

0.3 por los límites en los extremos $x=0$ y $x=\pi$

P2 | (b)

0.5 por relacionar las derivadas de Y y u.

0.3 por la EDP para Y

0.3 por las CB para Y

0.3 por la CI para Y

0.3 por reconocer el problema para Y

0.5 por la solución general en serie

0.5 por reconocer que los coef. b_k's son los mismos de la parte (a)

0.3 por obtener u.

PAUTA C3 - MA2002-2009

P3| Por separación de variables, buscamos una solución de la forma

$$U(t,x) = T(t)\,X(x) \qquad (0.5)$$

Sustituyendo en la EDP obtenemos

$$T''X + \alpha T'X + \beta TX = c^2 TX'' \qquad (0.5)$$

y dividiendo por TX (buscamos sols. no triviales)

$$\frac{T''}{T} + \alpha\frac{T'}{T} + \beta = c^2\frac{X''}{X} \qquad (0.5)$$

luego para λ constante, resolvemos

$$\frac{X''}{X} = k_1 = \frac{\lambda}{c^2} \quad y \quad \frac{T''}{T} + \alpha\frac{T'}{T} + \beta = \lambda \qquad (0.5)$$

Como las CB son de tipo Dirichlet homogéneas y buscamos soluciones no triviales, entonces necesariamente se tiene que

$$X_k(x) = A_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad \text{con} \quad \frac{\lambda_k}{c^2} = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \qquad (0.5)$$

de modo que $\lambda_k = -c^2\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = -\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$

Por otro lado, para T se tiene:

$$T_k'' + \alpha T_k' + \beta T_k = \lambda_k T_k$$

$$\Longleftrightarrow \quad T_k'' + \alpha T_k' + (\beta - \lambda_k) T_k = 0 \qquad (0.5)$$

Esta última ecuación se resuelve con el método del polinomio característico en m:

$$m^2 + \alpha m + (\beta - \lambda_k) = 0$$

$$\Longleftrightarrow m = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\beta - \lambda_k)}}{2}$$ (0.5)

$$= \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta + \frac{4k^2\pi^2c^2}{L^2}}}{2}$$

Pero por hipótesis

$$\alpha^2 < 4\beta + 4c^2\pi^2/L^2 \leq 4\beta + 4c^2\pi^2k^2/L^2 \quad, k = 1, 2, \ldots$$

de modo que todas las raíces son complejas

$$m_k = -\frac{\alpha}{2} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{4\beta L^2 - \alpha^2 - 4k^2\pi^2c^2}}{2L}}_{\omega_k}$$

y en consecuencia las soluciones son de la forma

$$T_k(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(B_k \operatorname{sen}(\omega_k t) + C_k \cos(\omega_k t)\right).$$ (0.5)

Así

$$U_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(B_k \operatorname{sen}(\omega_k t)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + C_k \cos(\omega_k t)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$$ (0.5)

Buscamos una solución $U(t,x)$ que sea superposición de las anteriores y que satisfaga las condiciones iniciales.

Como $u_t(0,x) = 0$ entonces basta tomar $T_k'(0) = 0$

Pero

$$T_k'(0) = -\frac{\alpha}{2} C_k + \omega_k B_k$$

(0.5)

$$\Rightarrow \quad C_k = \frac{2\omega_k}{\alpha} B_k$$

Así

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[\operatorname{sen}(\omega_k t) + \frac{2\omega_k}{\alpha} \cos(\omega_k t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

(0.5)

Evaluando en $t=0$

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

de donde

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

(0.5)