Control 3

P1. a) (3,0 ptos.) Demuestre que para $a > 0, b > 0$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx = \pi(b-a).$$

Con lo anterior deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

Indicación: Explicite sobre qué contorno está integrando y justifique la validez de los teoremas usados.

b) (3,0 ptos.) Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{a + b\cos(t) + c\operatorname{sen}(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 > b^2 + c^2$.

P2. a) (4,0 ptos.) Encuentre el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \cos(\alpha x), \quad -\pi < x < \pi,$$

para cualquier α no entero.

Concluya que

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}\right)$$

si α no es entero. Explique.

b) (2,0 ptos.) Calcule la Transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)e^{-4x} & \text{si } x \geq 3 \\ 0 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

P3. Resuelva la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + 2tu &= 0 & 0 < x < 1/2, \quad 0 < t \\ u_x(0,t) = u(1/2,t) &= 0 & 0 < t \\ u(x,0) &= 1 - 2x & 0 < x < 1/2 \end{aligned}$$

Tiempo: 3 horas.

Problema 1 CONTROL 3 MA2002 Prim-2010

(a) Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx = \pi(b-a)$, para $a \geq 0$ y $b \geq 0$

y deduzca que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2(x)}{x^2} dx = \pi$

Indicación: Considere la función $f(z) = (e^{az} - e^{bz})/z^2$ y un contorno adecuado γ en el plano complejo para establecer la igualdad pedida mediante la integral de f sobre γ (debe indicar claramente los teoremas que utilice).

Solución.

(1) La definición de f implica que z = 0, es el único (posible) polo de f (f(0) = 0/0). Primero, se determina si f es reparable en z = 0.

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} = (L'H) \lim_{z\to 0} \frac{iae^{iaz} - ibe^{ibz}}{2z} = \frac{i(a-b)}{0},$$ implica f no es reparable en 0.

(2) Se determina si z = 0 es un polo de orden 1, i.e., si existe $\lim_{z\to 0} zf(z)$.

$$\lim_{z\to 0} z\frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z} = (\text{L'H}) \lim_{z\to 0} \frac{iae^{iaz} - ibe^{ibz}}{1} = i(a-b),$$

lo que implica que z = 0 es polo simple real de f y que Res(f,0) = $i(a-b)$.

(3) Se aplica el T. de los residuos con f y el contorno $\gamma = \gamma' \cup \partial' \cup \gamma'' \cup \partial''$, donde γ' y γ'' son los semicírculos: |z| = R y |z| = r, con R>1, r >0 e Im(z)$\geq$0; ∂' y ∂'' son los segmentos lineales en el eje real que unen -R con -r y r con R.

(4) Como γ no encierra a z = 0 (único polo de f), por el T. de residuos se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz + \int_{\partial'} f(z)dz + \int_{\gamma''} f(z)dz + \int_{\partial'} f(z)dz = 0$$

Si R$\to \infty$, $\int_{\gamma'} f(z)dz \to 0$, $\int_{\partial'} f(z)dz + \int_{\partial'} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, y si r$\to$0, $\int_{\gamma''} f(z)dz \to -\pi i \operatorname{Res}(f,0)$

i.e., si R$\to \infty$ y r$\to$0, $\int_\gamma f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx) + i(sen(ax) - sen(bx))}{x^2} + \pi(a-b)$

y como $\int_\gamma f(z)dz = 0$, para todo R>0 y todo r>0, resulta $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} = \pi(b-a)$

Puntaje: (1) 0.5; (2) 0.5; (3) 0.5; (4) 1.5

P1 (b) Demuestre que para todo a,b,c tal que $a^2 > b^2 + c^2$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(t) + csen(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}},$$

Indicación. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Solución.

(1) Sea R(t) la función a integrar, la correspondiente función f(z) asociada a R es

$$f(z) = \left(\frac{1}{a + b(z^2 + 1)/2 + c(z^2 - 1)/2i}\right)\frac{1}{iz} = \frac{2}{2iaz + ib(z^2 + 1) + c(z^2 - 1)} = \frac{2}{(c + ib)z^2 + 2iaz + (-c + ib)}$$

(2) Se determinan los polos de f que son encerrados por γ : $|z| = 1$.

Polos de f son las raíces de $p(z) = (c+ib)z^2 + 2iaz + (-c+ib) = Az^2 + Bz + C$. Si $D = B^2 - 4AC$, entonces $D = 4(c+ib)(-c+ib) = -4(b^2 + c^2)$ y las raíces son:

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ic} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ic} \quad (z_1 \text{ y } z_2 \text{ son polos simples})$$

(3) Como $a^2 > b^2 + c^2$, $d = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2} > 0$, $z_1 = \dfrac{-a + d}{b - ic}$ y $z_2 = \dfrac{-a - d}{b - ic}$

Además, como $a > d$, se tiene

$$|z_1| = \frac{a - d}{b^2 + c^2} = \frac{(a - d)(a + d)}{(b^2 + c^2)(a + d)} = \frac{(a^2 - d^2)}{(b^2 + c^2)(a + d)} = \frac{(b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)(a + d)} = \frac{1}{a + d} < 1$$

Similarmente, se comprueba que $|z_2| > 1$, y por lo tanto, γ encierra solo a z_1.

(4) Por el T. de los residuos, $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$, donde $\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim (z-z_1)f(z)$

Para calcular este limite se utiliza la factorizacion: $p(z) = (c+ib)(z - z_1)(z - z_2)$, implicando

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim (z-z_1)f(z) = \lim (z - z_1)\frac{2}{(c + ib)(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{2}{(c + ib)(z_1 - z_2)}$$

y como $z_1 - z_2 = \dfrac{2d}{b - ic}$ y $(c + ib) = i(b - ic)$ resulta que $\operatorname{Res}(f, z_1) = \dfrac{1}{id}$, lo que implica la igualdad del enunciado.

Puntaje: (1) 0.6; (2) 0.4; (2) 1.0; (4) 1.0

Problema 2 ①

a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, Encuentre el desarrollo de Fourier de la función

$$f(x) = \cos(\alpha x), \quad -\pi < x < \pi$$

Concluya que

$$\cot g(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\right)$$

si α no es entero

Solución

Consideremos la serie de Fourier de f con $\alpha \neq 0$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right)$$

(0,5)

luego

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha} \Big/_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\alpha\pi}\left|\operatorname{sen}(\alpha\pi) + \operatorname{sen}(\alpha\pi)\right)$$

$$= \frac{2}{\alpha\pi} \operatorname{sen}(\alpha\pi) \quad (0,5)$$

Notemos que como f es par, la serie de Fourier es una serie de cosenos, es decir, $b_n = 0$, $\forall n, n \geq 1$

(0,5)

Si $n \geq 1$, entonces ②

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(n x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(n x)\,dx$$

(0,5)

pero

$$\cos(a x)\cos(b x) = \frac{\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)}{2}$$

es decir

$$\cos(\alpha x)\cos(n x) = \frac{\cos((\alpha-n)x) + \cos((\alpha+n)x)}{2}$$

luego

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(\alpha-n)x + \cos((\alpha+n)x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos((\alpha-n)x) + \cos((\alpha+n)x))\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((\alpha-n)x)}{\alpha-n} + \frac{\operatorname{sen}((\alpha+n)x)}{\alpha+n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n} + \frac{\operatorname{sen}((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n}\right]$$

Notemos que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n} + \frac{\operatorname{sen}((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\alpha+n)\operatorname{sen}((\alpha-n)\pi) + (\alpha-n)\operatorname{sen}((\alpha+n)\pi)}{\alpha^2-n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\alpha+n)\left[\operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(n\pi) - \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}}\cos\alpha\pi\right] + (\alpha-n)\left[\operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(n\pi) \overset{\to 0}{\cancel{-\operatorname{sen}(n\pi)\cos}}\ldots\right.}{\alpha^2-n^2}\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\alpha+n)\operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(n\pi) + (\alpha-n)\operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(n\pi)}{\alpha^2-n^2}\right]$$

$$= \frac{2\alpha\operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(n\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} = \frac{2\alpha(-1)^n\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} \quad (0,5)$$

luego la serie de Fourier es

$$S_f = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^n\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nx)$$

(0,5)

Si evaluamos la serie de Fourier en $x=\pi$, entonces (4

$$\frac{\cos(\alpha\pi)+\cos(-\alpha\pi)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha(-1)^n \operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(n\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

(0,5)

es decir

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

así

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pi) = \frac{\cos(\alpha\pi)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[1/\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\right]$$

(0,5)

b) Calcule la transformada de Fourier de la función ⑤

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)\,e^{-4x} & , \ x \geq 3 \\ 0 & , \ x < 3 \end{cases}$$

Solución

La transformada de Fourier de f se define como

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixs}\, dx \qquad (0,5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{3}^{+\infty} (x-3)\, e^{-4x}\, e^{-ixs}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{3}^{+\infty} (x-3)\, e^{-x(4+is)}\, dx \qquad (0,5)$$

integrando por partes y considerando

$$u = x - 3 \quad , \quad du = dx$$

$$dv = e^{-x(4+is)}\, dx \quad , \quad v = \frac{e^{-x(4+is)}}{-(4+is)}$$

Se tiene que.

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\cancel{(x-3)\frac{e^{-x(4+is)}}{-4+is}}\Big/_{3}^{+\infty} + \int_3^{+\infty} \frac{e^{-x(4+is)}}{-(4+is)}\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-(4+is)} \int_3^{+\infty} e^{-x(4+is)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-(4+is)} \frac{e^{-x(4+is)}}{-(4+is)}\Big/_{3}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(4+is)^2}\left(0 + e^{-3(4+is)} \right)$$

$$= \frac{e^{-12-3is}}{\sqrt{2\pi}\,(4+is)^2} \quad , \quad s \in \mathbb{R}.$$

(1,0)

Problema 3:

Resuelva el problema

$$u_t - u_{xx} + 2tu = 0 \quad , \quad 0 < x < 1/2 \, , \, t > 0$$

$$u_x(0,t) = u(1/2,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 1 - 2x \quad , \quad 0 < x < 1/2$$

Solución

Consideremos que

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

luego, la ecuación queda en la forma

$$XT' - X''T + 2tXT = 0$$

Como X y T no son funciones nulas, entonces dividiendo por XT, se tiene

$$\frac{T'}{T} - \frac{X''}{X} + 2t = 0$$

es decir

$$\frac{T'}{T} + 2t = \frac{X''}{X}$$

Luego

$\frac{T'}{T} + 2t = \frac{X''}{X} = \lambda = cte.$ (0,5)

Además

$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$

$u(1/2,t) = X(1/2)T(t) = 0 \Rightarrow X(1/2) = 0$

Así tenemos el problema

$$\boxed{\begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \quad , \quad 0 < x < 1/2 \\ X'(0) = X(1/2) = 0 \end{array}}$$ (0,5)

Se tienen tres casos

<u>caso $\lambda = 0$</u>

$X(x) = a + bx$

luego $X'(0) = b = 0 \Rightarrow b = 0$ y $X(1/2) = a = 0$ (0,5)

$\therefore X \equiv 0$

No aporta soluciones no nulas

<u>caso $\lambda > 0$</u>

Si $\lambda = k^2$, $k > 0$.

En este caso tenemos el problema

$$X'' - k^2 X = 0 \quad , \quad 0 < x < 1/2$$
$$X'(0) = X(1/2) = 0$$

Por lo tanto se tiene la solución

$$X(x) = a e^{kx} + b e^{-kx}$$

así

$$X'(0) = 0 \Leftrightarrow ak - bk = 0$$

$$\Leftrightarrow k(a-b) = 0 \Rightarrow a = b.$$

Además

$$X(1/2) = 0 \Leftrightarrow a e^{k/2} + b e^{-k/2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(e^{k/2} + e^{-k/2}) = 0$$

como $k > 0$, entonces se tiene que

$$a(e^{k/2} + e^{-k/2}) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\therefore a = b = 0$$

y así la única solución es

$$X(x) \equiv 0 \quad \text{en} \quad 0 < x < 1/2.$$

(0,5)

caso $\lambda < 0$

Sea $\lambda = -k^2$, entonces tenemos el problema

$$X'' + k^2 X = 0 \qquad 0 < x < 1/2$$
$$X'(0) = X(1/2) = 0$$

(0,5)

Así entonces

$$X(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$$

así

$$X'(0) = 0 \iff \left(-ak\,\mathrm{sen}(kx) + bk\cos(kx)\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\iff bk = 0$$

luego $b = 0$

además

$$X(1/2) = 0 \iff a\cos(k/2) = 0$$

por tanto, las soluciones no nulas se obtienen considerando

$$\cos(k/2) = 0 \iff k = (2n-1)\pi \quad, n = 1, 2, 3, \ldots$$

así, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ ~~obtenemos~~ (0,5)

soluciones no nulas si

$$\lambda_n = -(2n-1)^2\pi^2$$

$$X_n(x) = a_n \cos((2n-1)\pi x) \qquad (0,5)$$

Para calcular $T_n(t)$ se tiene que

$$\frac{T_n'}{T_n} + 2t = \lambda_n$$

es decir,

$$\frac{T_n'}{T_n} = \lambda_n - 2t \quad \Longrightarrow \quad T_n' + (2t - \lambda_n)T_n = 0.$$

por tanto

$$T_n' + (2t + (2n-1)^2\pi^2)T_n = 0$$

luego

$$T_n(t) = \alpha_n e^{-\int (2t+(2n-1)^2\pi^2)\,dt}$$

$$= \alpha_n e^{-t^2-(1-2n)^2\pi^2 t} \qquad (0,5)$$

así

$$u_n(x,t) = c_n e^{-t^2-(1-2n)^2\pi^2 t} \cos((2n-1)\pi x)$$

y por tanto

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-t^2-(1-2n)^2\pi^2 t} \cos((2n-1)\pi x) \qquad (0,5)$$

Para obtener los coeficientes se tiene que

$$1-2x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos((2n-1)\pi x) \quad \ldots (*)$$

Así, si consideramos la función

$$f(x) = 1-2x \;, \quad 0 < x < 1$$

entonces $(*)$ nos da la serie de Fourier de la extensión par de f, f_p en el intervalo $(-1,1)$.

En tal caso, la serie de Fourier es

(0,5)

$$S_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos(k\pi x)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_p(x)\,dx = 2\int_0^1 (1-2x)\,dx = 2\left[x-x^2\right]\Big/_0^1 = 0.$$

$$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_p(x)\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 (1-2x)\cos(k\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx - 4\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx$$

$$= 2\,\cancel{\frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi}}\Big/_0^1 \to 0 \;-\; 4\left[\cancel{x\,\frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi}}\Big/_0^1 \to 0 \;-\; \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right]$$

$$= \frac{-4}{(k\pi)^2}\cos(k\pi x)\Big/_0^1 = \frac{-4}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0 & , k \text{ es par} \\ \dfrac{8}{(k\pi)^2} & , k \text{ es impa} \end{cases}$$

(0,5)

luego

$$S_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left((2n-1)\pi x\right)$$

es decir,

$$c_n = \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \quad , \; n=1,2,\dots$$

y

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} e^{-t^2-(1-2n)^2\pi^2 t} \cos\left((2n-1)\pi x\right)$$

(0,5)