Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA2002-05 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Guía Control N° 3
Profesor: Jaime González E.
Auxiliares: Sergio Castillo J. y Carlos Duarte C.
Semestre Primavera 2010
Fecha: Martes 2 de Noviembre de 2010

P1.- Determine las regiones de convergencia de las series de Laurent de las siguientes funciones en torno a z_0, y obtenga la correspondiente serie de Laurent que converge en z_1.

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-2)^2} \quad z_0 = i \quad z_1 = -i \quad f(z) = \frac{1}{z^2+i} \quad z_0 = i \quad z_1 = 1$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z+i)} \quad z_0 = i \quad z_1 = 1 \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-i)^2} \quad z_0 = 1 \quad z_1 = \frac{i}{2}$$

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z(z-\pi)^2} \quad z_0 = 1 \quad z_1 = 3 \quad f(z) = \frac{3z}{(z-i)(z-1)^2} \quad z_0 = 2i \quad z_1 = 2$$

P2.- Calcule las siguientes integrales usando la técnica de los residuos.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)d\theta}{5-4\cos(\theta)} = \frac{\pi}{12} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\,\mathrm{sen}(\theta))^2} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(\pi x)dx}{x^2+2x+5} = -\pi e^{-2\pi} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi x)dx}{x^4+x^2+1} = \frac{-\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{5\pi}{288} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(x)dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

P3.- Demuestre la siguiente igualdad (en el intervalo dado), usando una expansión de Fourier.

1.
$$x^2 = -\frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad [0, 2\pi]$$

2.
$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{sen}(nx)}{n} \quad [-\pi, \pi]$$

3.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} \quad [-\pi, \pi]$$

4.

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \quad [0, \pi]$$

5.

$$\cos(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\operatorname{sen}(2nx)}{4n^2-1} \quad [0, \pi]$$

P4.- Obtenga la transformada de Fourier de la función dada.

$$f(x) = e^{-|x|} \quad f(x) = xe^{-x^2} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2+4} \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

P5.- Resuelva la siguiente EDP usando método de separación de variables y T. de Fourier.

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - at \quad 0 < x < l \quad t > 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad u(x,0) = f(x) \quad a, l > 0$$

2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad u(x,0) = u(0,t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad 0 < y < 1 \quad u(x,0) = e^{-x^2} \quad u(x,1) = 0$$

u acotada.

4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0 \quad u(x,0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{12}{x^2+9}$$

u acotada.