

Universidad de Chile - Facultad de Ciencias F ́ısicas y Matemáticas.

C

ALCULO ́

SEMESTRE AVANZADO DE OTO

Y APLICACIONES.

NO ̃

2014.

Profesores:

Alvaro ́

PAUTA CONTROL 3. Hernández, Rodrigo Lecaros, Erwin Topp.

P1.- (b) (3 ptos.) Sean ↵, > 0, ↵ = . Demuestre que

1∫

1

cos(x)dx (x2 + ↵2)(x2 + 2)

(

1e ↵ 1e ↵

)

.

R: Mediante el uso de la función compleja

f(z) =

=

↵2 ⇡

2

eiz (z2 + ↵2)(z2 + 2)

,

cuyos polos son z

1

= i↵,z

2

= i , z

3

= z

1

y z

4

= z

2

, todos simples. Los poloes que están en el semiplano 1(x, y) 2 C : y > 0l son z

1

y z

2

, de donde, usando teorema de los residuos, obtenemos que

1∫

1

eix

(

(x2 + ↵2)(x2 + 2)

) dx = 2⇡i

Res(f,i↵) + Res(f,i )

.

Calculamos los residuos:

Res(f,i↵) = z!i↵ l ́ım

(z i↵)

(z2 + eiz

2)(z2 + ↵2)

= z!i↵ l ́ım

(z2 + eiz

2)(z + i↵)

=

2i↵( e 2 ↵

↵2)

.

Res(f,i ) = z!i l ́ım

eiz (z2 + 2)(z2 + ↵2)

= z!i l ́ım

(z i )

eiz (z + i )(z2 + ↵2)

=

2i ( e

2 + ↵2)

.

Por lo tanto, concluimos que

1∫

1

eix

(

e ↵ (x2 + ↵2)(x2 + 2)

↵ dx =

↵2 ⇡

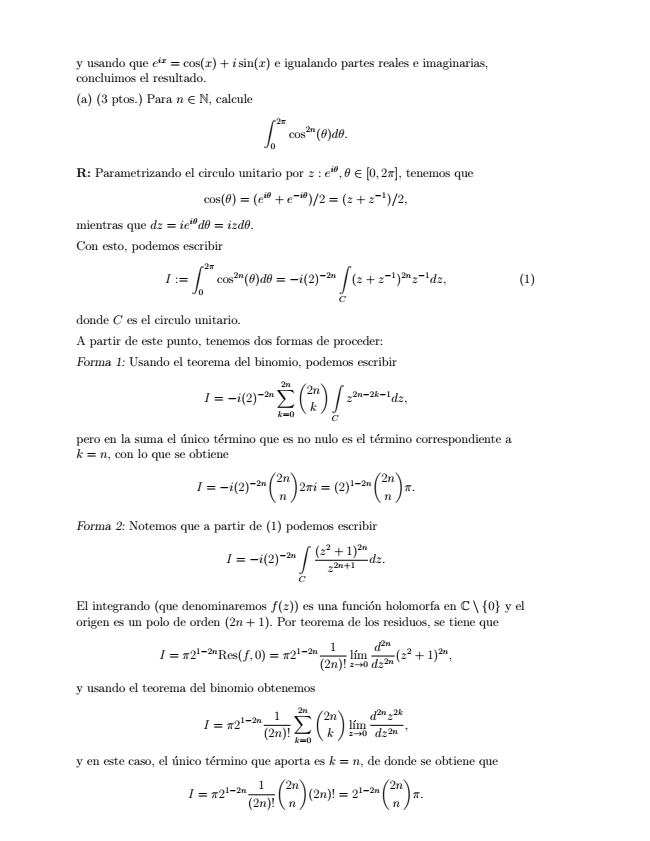
2

+

e

)

,



y usando que eix = cos(x) + isin(x) e igualando partes reales e imaginarias, concluimos el resultado. (a) (3 ptos.) Para n 2 N, calcule

∫

2⇡

0

cos2n(✓)d✓.

R: Parametrizando el circulo unitario por z : ei✓,✓ 2 [0,2⇡], tenemos que

cos(✓)=(ei✓ + e i✓)/2=(z + z 1)/2,

mientras que dz = iei✓d✓ = izd✓. Con esto, podemos escribir

I :=

∫

2⇡

0

∫ cos2n(✓)d✓ = i(2) 2n

(z + z 1)2nz 1dz, (1)

C

donde C es el circulo unitario. A partir de este punto, tenemos dos formas de proceder: Forma 1: Usando el teorema del binomio, podemos escribir

I = i(2) 2n

2n∑

(

2n

)∫

k=0

k

C

z2n 2k 1dz,

pero en la suma el único término que es no nulo es el término correspondiente a k = n, con lo que se obtiene

I = i(2) 2n

(

2n n

)

2⇡i = (2)1 2n

(

2n n

)

⇡.

Forma 2: Notemos que a partir de (1) podemos escribir

I = i(2) 2n

∫

C

(z2 z2n+1

+ 1)2n

dz.

El integrando (que denominaremos f(z)) es una función holomorfa en C < 10l y el origen es un polo de orden (2n + 1). Por teorema de los residuos, se tiene que

I = ⇡21 2nRes(f,0) = ⇡21 2n

1 (2n)!

dz2n d2n

(z2 + 1)2n,

y usando el teorema del binomio obtenemos

I = ⇡21 2n

z!0 l ́ım

1

2n∑

(

2n (2n)!

k=0

k

)

z!0 l ́ım

d2nz2k dz2n

,

y en este caso, el único término que aporta es k = n, de donde se obtiene que

I = ⇡21 2n

(

2n n

)

(2n)! = 21 2n 1

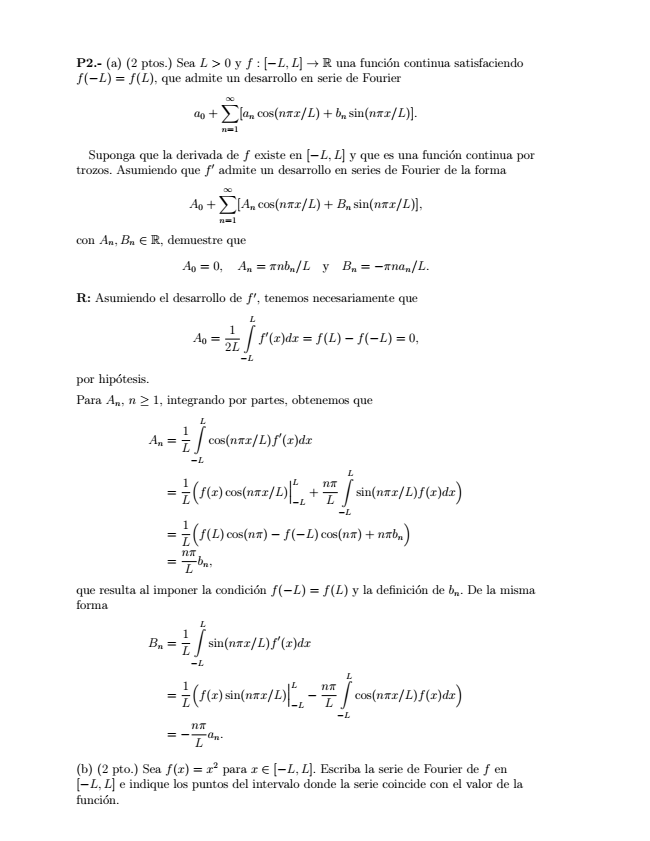
(

2n (2n)!

n

)

⇡.



P2.- (a) (2 ptos.) Sea L > 0 y f : [ L, L] ! R una función continua satisfaciendo f( L) = f(L), que admite un desarrollo en serie de Fourier

a

0

+

1∑

[a

n

cos(n⇡x/L) + b

n

sin(n⇡x/L)].

n=1

Suponga que la derivada de f existe en [ L, L] y que es una función continua por trozos. Asumiendo que f0 admite un desarrollo en series de Fourier de la forma

A

0

+

1∑

[A

n

cos(n⇡x/L) + B

n

sin(n⇡x/L)],

n=1 con A

n

,B

n

2 R, demuestre que

A

0

= 0, A

n

= ⇡nb

n

/L y B

n

= ⇡na

n

/L.

R: Asumiendo el desarrollo de f 0, tenemos necesariamente que

A

0

1 2L

L∫

f0(x)dx = f(L) f( L)=0,

L

por hipótesis. Para A

n

=

, n 1, integrando por partes, obtenemos que

A

n

=

L 1

L∫

cos(n⇡x/L)f 0(x)dx

L

=

(

f(x) cos(n⇡x/L)

\ \ \

L∫

L

)

=

1 L

L

L

+

n⇡ L

sin(n⇡x/L)f(x)dx

(

f(L) cos(n⇡) f( L) cos(n⇡) + n⇡b

n

)

=

1 L n⇡ L

b

n

,

que resulta al imponer la condición f( L) = f(L) y la definición de b

n

. De la misma forma

B

n

=

L 1

L∫

sin(n⇡x/L)f0(x)dx

L

=

(

f(x) sin(n⇡x/L)

\ \ \

L∫

L

)

=

1 L

L

n⇡

L

L

cos(n⇡x/L)f(x)dx

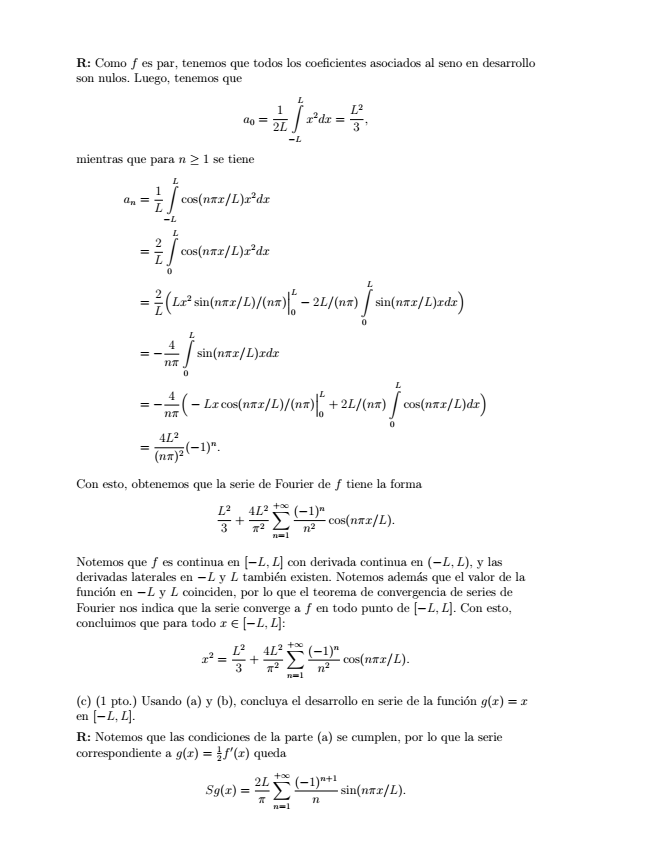
n⇡ L

a

n

.

(b) (2 pto.) Sea f(x) = x2 para x 2 [ L, L]. Escriba la serie de Fourier de f en [ L, L] e indique los puntos del intervalo donde la serie coincide con el valor de la función.



R: Como f es par, tenemos que todos los coeficientes asociados al seno en desarrollo son nulos. Luego, tenemos que

a

0

=

2L 1

L∫

x2dx =

L2 3

,

L

mientras que para n 1 se tiene

a

n

=

L 1

L∫

cos(n⇡x/L)x2dx

L

=

L 2

L∫

cos(n⇡x/L)x2dx

0

=

(

Lx2 sin(n⇡x/L)/(n⇡)

\ \ \

L∫

0

)

=

2 L

L

0

2L/(n⇡)

sin(n⇡x/L)xdx

4 n⇡

L∫

sin(n⇡x/L)xdx

0

=

(

Lxcos(n⇡x/L)/(n⇡)

\ \ \

L∫

0

)

=

4 n⇡

L

0

+ 2L/(n⇡)

cos(n⇡x/L)dx

4L2 (n⇡)2

( 1)n.

Con esto, obtenemos que la serie de Fourier de f tiene la forma

L2 3

+

4L2 ⇡2

+1∑

n=1

( n2

1)n

cos(n⇡x/L).

Notemos que f es continua en [ L, L] con derivada continua en ( L, L), y las derivadas laterales en L y L también existen. Notemos además que el valor de la función en L y L coinciden, por lo que el teorema de convergencia de series de Fourier nos indica que la serie converge a f en todo punto de [ L, L]. Con esto, concluimos que para todo x 2 [ L, L]:

x2 =

L2 3

+

4L2 ⇡2

+1∑

n=1

( n2

1)n

cos(n⇡x/L).

(c) (1 pto.) Usando (a) y (b), concluya el desarrollo en serie de la función g(x) = x en [ L, L]. R: Notemos que las condiciones de la parte (a) se cumplen, por lo que la serie correspondiente a g(x) = 1 2

f 0(x) queda

Sg(x) =

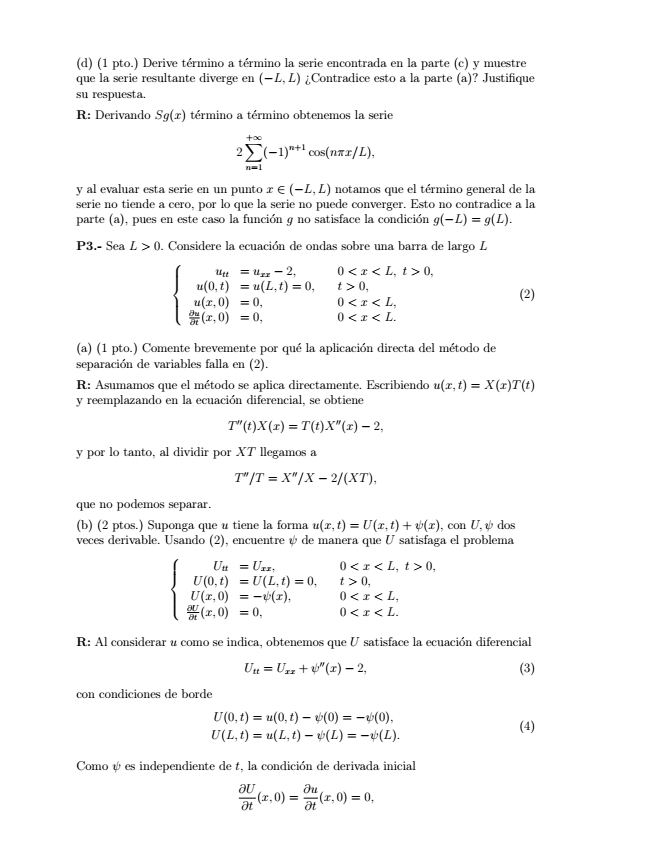
2L ⇡

+1∑ ( n=1

1)n+1

n

sin(n⇡x/L).



(d) (1 pto.) Derive término a término la serie encontrada en la parte (c) y muestre que la serie resultante diverge en ( L, L) ¿Contradice esto a la parte (a)? Justifique su respuesta. R: Derivando Sg(x) término a término obtenemos la serie

2

+1∑

n=1

( 1)n+1 cos(n⇡x/L),

y al evaluar esta serie en un punto x 2 ( L, L) notamos que el término general de la serie no tiende a cero, por lo que la serie no puede converger. Esto no contradice a la parte (a), pues en este caso la función g no satisface la condición g( L) = g(L).

P3.- Sea L > 0. Considere la ecuación de ondas sobre una barra de largo L

⎛ ⎢ ⎢ <

⎢ ⎢ k

u

tt

= u

xx

2, 0 <x<L, t> 0, u(0,t) = u(L, t)=0, t > 0, u(x,0) =0, 0 <x<L, @u @t

(2)

(a) (1 pto.) Comente brevemente por qué la aplicación directa del método de separación de variables falla en (2). R: Asumamos que el método se aplica directamente. Escribiendo u(x, t) = X(x)T(t) y reemplazando en la ecuación diferencial, se obtiene

T 00(t)X(x) = T(t)X00(x) 2,

y por lo tanto, al dividir por XT llegamos a

T 00/T = X00/X 2/(XT),

que no podemos separar. (b) (2 ptos.) Suponga que u tiene la forma u(x, t) = U(x, t) + (x), con U, dos veces derivable. Usando (2), encuentre de manera que U satisfaga el problema

⎛ ⎢ ⎢ <

⎢ ⎢ k

(x,0) =0, 0 <x<L.

U

tt

= U

xx

, 0 <x<L, t> 0, U(0,t) = U(L, t)=0, t > 0, U(x,0) = (x), 0 <x<L, @U @t

(x,0) =0, 0 <x<L.

R: Al considerar u como se indica, obtenemos que U satisface la ecuación diferencial

U

tt

= U

xx

+ 00(x) 2, (3)

con condiciones de borde

U(0,t) = u(0,t) (0) = (0), U(L, t) = u(L, t) (L) = (L).

(4)

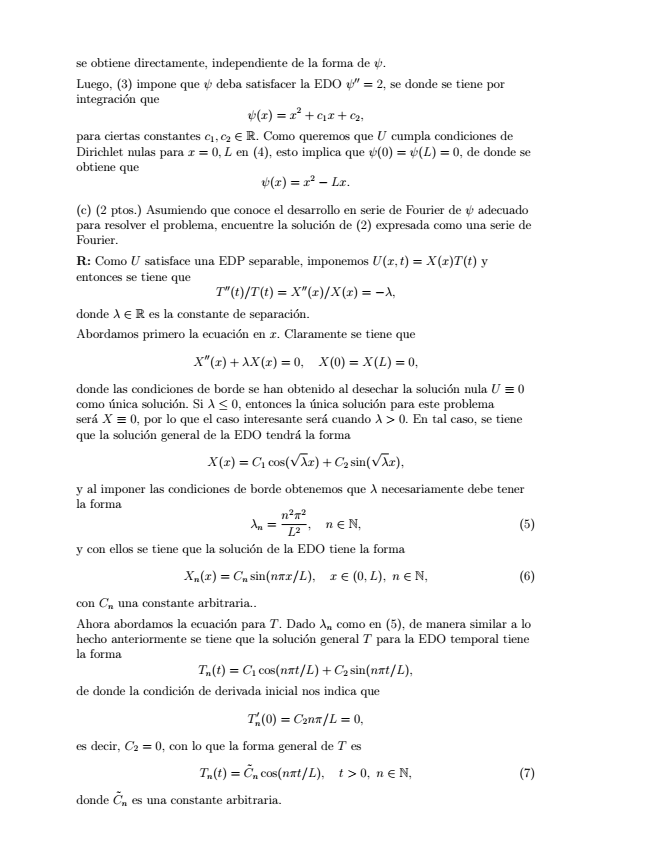
Como es independiente de t, la condición de derivada inicial

@U @t

(x,0) =

@u @t

(x,0) = 0,



se obtiene directamente, independiente de la forma de . Luego, (3) impone que deba satisfacer la EDO 00 = 2, se donde se tiene por integración que

(x) = x2 + c

1

x + c

2

,

para ciertas constantes c

1

,c

2

2 R. Como queremos que U cumpla condiciones de Dirichlet nulas para x = 0,L en (4), esto implica que (0) = (L) = 0, de donde se obtiene que

(x) = x2 Lx.

(c) (2 ptos.) Asumiendo que conoce el desarrollo en serie de Fourier de adecuado para resolver el problema, encuentre la solución de (2) expresada como una serie de Fourier. R: Como U satisface una EDP separable, imponemos U(x, t) = X(x)T(t) y entonces se tiene que

T 00(t)/T(t) = X00(x)/X(x) = ,

donde 2 R es la constante de separación. Abordamos primero la ecuación en x. Claramente se tiene que

X00(x) + X(x)=0, X(0) = X(L)=0,

donde las condiciones de borde se han obtenido al desechar la solución nula U ⌘ 0 como única solución. Si  0, entonces la única solución para este problema será X ⌘ 0, por lo que el caso interesante será cuando > 0. En tal caso, se tiene que la solución general de la EDO tendrá la forma

X(x) = C

1

p

x) + C

2

p

x),

y al imponer las condiciones de borde obtenemos que necesariamente debe tener la forma

n

cos(

sin(

=

n2⇡2 L2

, n 2 N, (5)

y con ellos se tiene que la solución de la EDO tiene la forma

X

n

(x) = C

n

sin(n⇡x/L), x 2 (0,L), n 2 N, (6)

con C

n

una constante arbitraria.. Ahora abordamos la ecuación para T. Dado

n

como en (5), de manera similar a lo hecho anteriormente se tiene que la solución general T para la EDO temporal tiene la forma

T

n

(t) = C

1

cos(n⇡t/L) + C

2

sin(n⇡t/L),

de donde la condición de derivada inicial nos indica que

T n 0

(0) = C

2

n⇡/L = 0,

es decir, C

2

= 0, con lo que la forma general de T es

T

n

(t) =

C ̃

n

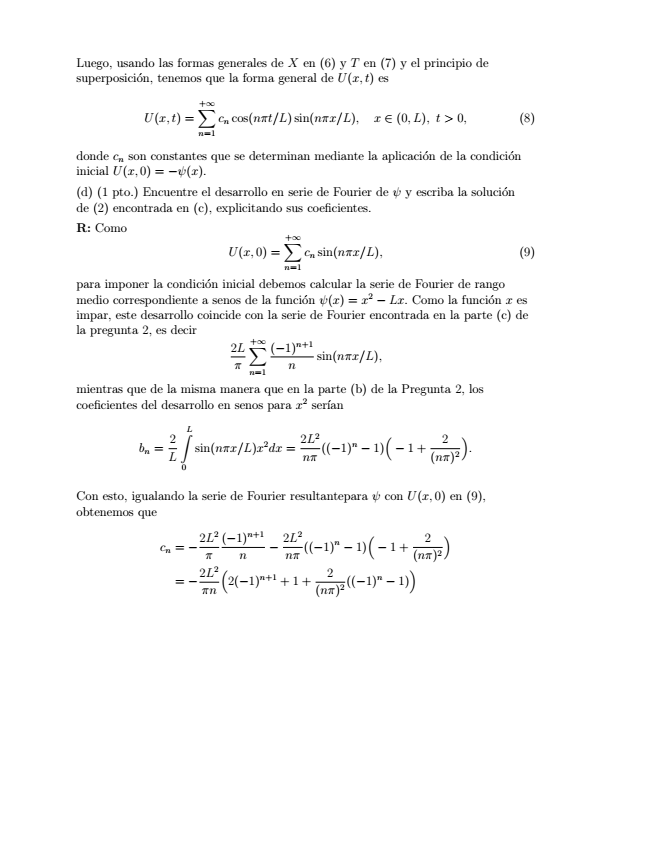
cos(n⇡t/L), t > 0, n 2 N, (7)

donde

C ̃

n

es una constante arbitraria.



Luego, usando las formas generales de X en (6) y T en (7) y el principio de superposición, tenemos que la forma general de U(x, t) es

U(x, t) =

+1∑

n=1

c

n

cos(n⇡t/L) sin(n⇡x/L), x 2 (0,L), t> 0, (8)

donde c

n

son constantes que se determinan mediante la aplicación de la condición inicial U(x,0) = (x). (d) (1 pto.) Encuentre el desarrollo en serie de Fourier de y escriba la solución de (2) encontrada en (c), explicitando sus coeficientes. R: Como

U(x,0) =

+1∑

n=1

c

n

sin(n⇡x/L), (9)

para imponer la condición inicial debemos calcular la serie de Fourier de rango medio correspondiente a senos de la función (x) = x2 Lx. Como la función x es impar, este desarrollo coincide con la serie de Fourier encontrada en la parte (c) de la pregunta 2, es decir

2L ⇡

+1∑

n=1

( 1)n+1 n

sin(n⇡x/L),

mientras que de la misma manera que en la parte (b) de la Pregunta 2, los coeficientes del desarrollo en senos para x2 ser ́ıan

b

n

=

L 2

L∫

sin(n⇡x/L)x2dx =

2L2 n⇡

(( 1)n (

1)

1 +

(n⇡)2 2

)

.

0

Con esto, igualando la serie de Fourier resultantepara con U(x,0) en (9), obtenemos que

c

n

=

2L2

( 1)n+1 ⇡

(

n

(

1 +

)

=

2L2 n⇡

(( 1)n 1)

2L2 ⇡n

2( 1)n+1 +1+

2

2 (n⇡)2

(( 1)n )

(n⇡)2

1)