Universidad de Chile - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES.
SEMESTRE DE OTOÑO 2014.
PAUTA CONTROL 3.
Profesores: Álvaro Hernández, Rodrigo Lecaros, Erwin Topp.

P1.- (b) (3 ptos.) Sean $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)} = \frac{\pi}{\alpha^2-\beta^2}\Big(\beta^{-1}e^{-\beta} - \alpha^{-1}e^{-\alpha}\Big).$$

R: Mediante el uso de la función compleja

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+\alpha^2)(z^2+\beta^2)},$$

cuyos polos son $z_1 = i\alpha$, $z_2 = i\beta$, $z_3 = -z_1$ y $z_4 = -z_2$, todos simples. Los poloes que están en el semiplano $\{(x,y) \in \mathbb{C} : y > 0\}$ son z_1 y z_2, de donde, usando teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}dx = 2\pi i\Big(\mathrm{Res}(f, i\alpha) + \mathrm{Res}(f, i\beta)\Big).$$

Calculamos los residuos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, i\alpha) &= \lim_{z\to i\alpha}(z-i\alpha)\frac{e^{iz}}{(z^2+\beta^2)(z^2+\alpha^2)} \\
&= \lim_{z\to i\alpha}\frac{e^{iz}}{(z^2+\beta^2)(z+i\alpha)} \\
&= \frac{e^{-\alpha}}{2i\alpha(\beta^2-\alpha^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, i\beta) &= \lim_{z\to i\beta}(z-i\beta)\frac{e^{iz}}{(z^2+\beta^2)(z^2+\alpha^2)} \\
&= \lim_{z\to i\beta}\frac{e^{iz}}{(z+i\beta)(z^2+\alpha^2)} \\
&= \frac{e^{-\beta}}{2i\beta(-\beta^2+\alpha^2)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}dx = \frac{\pi}{\alpha^2-\beta^2}\Big(\frac{-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-\beta}}{\beta}\Big),$$

y usando que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ e igualando partes reales e imaginarias, concluimos el resultado.

(a) (3 ptos.) Para $n \in \mathbb{N}$, calcule

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta.$$

R: Parametrizando el circulo unitario por $z : e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, tenemos que

$$\cos(\theta) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 = (z + z^{-1})/2,$$

mientras que $dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta$.

Con esto, podemos escribir

$$I := \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = -i(2)^{-2n} \int_C (z + z^{-1})^{2n} z^{-1} dz, \tag{1}$$

donde C es el circulo unitario.

A partir de este punto, tenemos dos formas de proceder:

Forma 1: Usando el teorema del binomio, podemos escribir

$$I = -i(2)^{-2n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_C z^{2n-2k-1} dz,$$

pero en la suma el único término que es no nulo es el término correspondiente a $k = n$, con lo que se obtiene

$$I = -i(2)^{-2n} \binom{2n}{n} 2\pi i = (2)^{1-2n} \binom{2n}{n} \pi.$$

Forma 2: Notemos que a partir de (1) podemos escribir

$$I = -i(2)^{-2n} \int_C \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz.$$

El integrando (que denominaremos $f(z)$) es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y el origen es un polo de orden $(2n + 1)$. Por teorema de los residuos, se tiene que

$$I = \pi 2^{1-2n} \text{Res}(f, 0) = \pi 2^{1-2n} \frac{1}{(2n)!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2 + 1)^{2n},$$

y usando el teorema del binomio obtenemos

$$I = \pi 2^{1-2n} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \lim_{z \to 0} \frac{d^{2n} z^{2k}}{dz^{2n}},$$

y en este caso, el único término que aporta es $k = n$, de donde se obtiene que

$$I = \pi 2^{1-2n} \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{n} (2n)! = 2^{1-2n} \binom{2n}{n} \pi.$$

P2.- (a) (2 ptos.) Sea $L > 0$ y $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ una función continua satisfaciendo $f(-L) = f(L)$, que admite un desarrollo en serie de Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)].$$

Suponga que la derivada de f existe en $[-L, L]$ y que es una función continua por trozos. Asumiendo que f' admite un desarrollo en series de Fourier de la forma

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi x/L) + B_n \sin(n\pi x/L)],$$

con $A_n, B_n \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$A_0 = 0, \quad A_n = \pi n b_n/L \quad \text{y} \quad B_n = -\pi n a_n/L.$$

R: Asumiendo el desarrollo de f', tenemos necesariamente que

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f'(x)dx = f(L) - f(-L) = 0,$$

por hipótesis.

Para A_n, $n \geq 1$, integrando por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos(n\pi x/L) f'(x)dx \\
&= \frac{1}{L}\Big(f(x) \cos(n\pi x/L)\Big|_{-L}^{L} + \frac{n\pi}{L} \int_{-L}^{L} \sin(n\pi x/L) f(x)dx \Big) \\
&= \frac{1}{L}\Big(f(L)\cos(n\pi) - f(-L)\cos(n\pi) + n\pi b_n \Big) \\
&= \frac{n\pi}{L} b_n,
\end{aligned}$$

que resulta al imponer la condición $f(-L) = f(L)$ y la definición de b_n. De la misma forma

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin(n\pi x/L) f'(x)dx \\
&= \frac{1}{L}\Big(f(x) \sin(n\pi x/L)\Big|_{-L}^{L} - \frac{n\pi}{L} \int_{-L}^{L} \cos(n\pi x/L) f(x)dx \Big) \\
&= -\frac{n\pi}{L} a_n.
\end{aligned}$$

(b) (2 pto.) Sea $f(x) = x^2$ para $x \in [-L, L]$. Escriba la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ e indique los puntos del intervalo donde la serie coincide con el valor de la función.

R: Como f es par, tenemos que todos los coeficientes asociados al seno en desarrollo son nulos. Luego, tenemos que

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} x^2 dx = \frac{L^2}{3},$$

mientras que para $n \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos(n\pi x/L)x^2 dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} \cos(n\pi x/L)x^2 dx \\
&= \frac{2}{L}\Big(Lx^2 \sin(n\pi x/L)/(n\pi)\Big|_0^L - 2L/(n\pi)\int_0^L \sin(n\pi x/L)x dx\Big) \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^L \sin(n\pi x/L)x dx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\Big(- Lx\cos(n\pi x/L)/(n\pi)\Big|_0^L + 2L/(n\pi)\int_0^L \cos(n\pi x/L)dx\Big) \\
&= \frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n.
\end{aligned}$$

Con esto, obtenemos que la serie de Fourier de f tiene la forma

$$\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x/L).$$

Notemos que f es continua en $[-L, L]$ con derivada continua en $(-L, L)$, y las derivadas laterales en $-L$ y L también existen. Notemos además que el valor de la función en $-L$ y L coinciden, por lo que el teorema de convergencia de series de Fourier nos indica que la serie converge a f en todo punto de $[-L, L]$. Con esto, concluimos que para todo $x \in [-L, L]$:

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x/L).$$

(c) (1 pto.) Usando (a) y (b), concluya el desarrollo en serie de la función $g(x) = x$ en $[-L, L]$.

R: Notemos que las condiciones de la parte (a) se cumplen, por lo que la serie correspondiente a $g(x) = \frac{1}{2}f'(x)$ queda

$$Sg(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x/L).$$

(d) (1 pto.) Derive término a término la serie encontrada en la parte (c) y muestre que la serie resultante diverge en $(-L, L)$ ¿Contradice esto a la parte (a)? Justifique su respuesta.

R: Derivando $Sg(x)$ término a término obtenemos la serie

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cos(n\pi x/L),$$

y al evaluar esta serie en un punto $x \in (-L, L)$ notamos que el término general de la serie no tiende a cero, por lo que la serie no puede converger. Esto no contradice a la parte (a), pues en este caso la función g no satisface la condición $g(-L) = g(L)$.

P3.- Sea $L > 0$. Considere la ecuación de ondas sobre una barra de largo L

$$\begin{cases} u_{tt} &= u_{xx} - 2, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= 0, & 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0, & 0 < x < L. \end{cases} \tag{2}$$

(a) (1 pto.) Comente brevemente por qué la aplicación directa del método de separación de variables falla en (2).

R: Asumamos que el método se aplica directamente. Escribiendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ y reemplazando en la ecuación diferencial, se obtiene

$$T''(t)X(x) = T(t)X''(x) - 2,$$

y por lo tanto, al dividir por XT llegamos a

$$T''/T = X''/X - 2/(XT),$$

que no podemos separar.

(b) (2 ptos.) Suponga que u tiene la forma $u(x,t) = U(x,t) + \psi(x)$, con U, ψ dos veces derivable. Usando (2), encuentre ψ de manera que U satisfaga el problema

$$\begin{cases} U_{tt} &= U_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ U(0,t) &= U(L,t) = 0, & t > 0, \\ U(x,0) &= -\psi(x), & 0 < x < L, \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) &= 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

R: Al considerar u como se indica, obtenemos que U satisface la ecuación diferencial

$$U_{tt} = U_{xx} + \psi''(x) - 2, \tag{3}$$

con condiciones de borde

$$\begin{aligned} U(0,t) = u(0,t) - \psi(0) = -\psi(0), \\ U(L,t) = u(L,t) - \psi(L) = -\psi(L). \end{aligned} \tag{4}$$

Como ψ es independiente de t, la condición de derivada inicial

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$$

se obtiene directamente, independiente de la forma de ψ.

Luego, (3) impone que ψ deba satisfacer la EDO $\psi'' = 2$, se donde se tiene por integración que

$$\psi(x) = x^2 + c_1 x + c_2,$$

para ciertas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como queremos que U cumpla condiciones de Dirichlet nulas para $x = 0, L$ en (4), esto implica que $\psi(0) = \psi(L) = 0$, de donde se obtiene que

$$\psi(x) = x^2 - Lx.$$

(c) (2 ptos.) Asumiendo que conoce el desarrollo en serie de Fourier de ψ adecuado para resolver el problema, encuentre la solución de (2) expresada como una serie de Fourier.

R: Como U satisface una EDP separable, imponemos $U(x,t) = X(x)T(t)$ y entonces se tiene que

$$T''(t)/T(t) = X''(x)/X(x) = -\lambda,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es la constante de separación.

Abordamos primero la ecuación en x. Claramente se tiene que

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0,$$

donde las condiciones de borde se han obtenido al desechar la solución nula $U \equiv 0$ como única solución. Si $\lambda \leq 0$, entonces la única solución para este problema será $X \equiv 0$, por lo que el caso interesante será cuando $\lambda > 0$. En tal caso, se tiene que la solución general de la EDO tendrá la forma

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x),$$

y al imponer las condiciones de borde obtenemos que λ necesariamente debe tener la forma

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

y con ellos se tiene que la solución de la EDO tiene la forma

$$X_n(x) = C_n \sin(n\pi x/L), \quad x \in (0, L),\ n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

con C_n una constante arbitraria..

Ahora abordamos la ecuación para T. Dado λ_n como en (5), de manera similar a lo hecho anteriormente se tiene que la solución general T para la EDO temporal tiene la forma

$$T_n(t) = C_1 \cos(n\pi t/L) + C_2 \sin(n\pi t/L),$$

de donde la condición de derivada inicial nos indica que

$$T_n'(0) = C_2 n\pi/L = 0,$$

es decir, $C_2 = 0$, con lo que la forma general de T es

$$T_n(t) = \tilde{C}_n \cos(n\pi t/L), \quad t > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

donde $\tilde{C}_n$ es una constante arbitraria.

Luego, usando las formas generales de X en (6) y T en (7) y el principio de superposición, tenemos que la forma general de $U(x,t)$ es

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\pi t/L)\sin(n\pi x/L), \quad x \in (0,L),\ t > 0, \tag{8}$$

donde c_n son constantes que se determinan mediante la aplicación de la condición inicial $U(x,0) = -\psi(x)$.

(d) (1 pto.) Encuentre el desarrollo en serie de Fourier de ψ y escriba la solución de (2) encontrada en (c), explicitando sus coeficientes.

R: Como

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x/L), \tag{9}$$

para imponer la condición inicial debemos calcular la serie de Fourier de rango medio correspondiente a senos de la función $\psi(x) = x^2 - Lx$. Como la función x es impar, este desarrollo coincide con la serie de Fourier encontrada en la parte (c) de la pregunta 2, es decir

$$\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x/L),$$

mientras que de la misma manera que en la parte (b) de la Pregunta 2, los coeficientes del desarrollo en senos para x^2 serían

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(n\pi x/L)x^2dx = \frac{2L^2}{n\pi}((-1)^n - 1)\Big(-1 + \frac{2}{(n\pi)^2}\Big).$$

Con esto, igualando la serie de Fourier resultantepara ψ con $U(x,0)$ en (9), obtenemos que

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{2L^2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{2L^2}{n\pi}((-1)^n - 1)\Big(-1 + \frac{2}{(n\pi)^2}\Big) \\ &= -\frac{2L^2}{\pi n}\Big(2(-1)^{n+1} + 1 + \frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)\Big) \end{aligned}$$