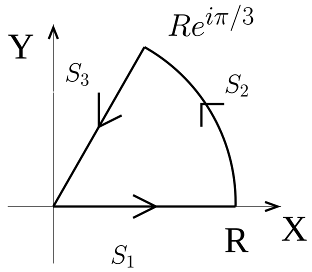
Control 3 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 22 de Noviembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

(a) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$. Para ello, utilize el Teorema de los Residuos para evaluar $\displaystyle\oint_{S_R} \frac{z}{1+z^6}dz$, donde $S_R = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (S_1 y S_3 son segmentos rectos que forman un ángulo de $\pi/3$ entre ellos, y S_2 es el arco de círculo de radio R, desde el complejo $(0, R)$ hasta $Re^{i\pi/3}$).

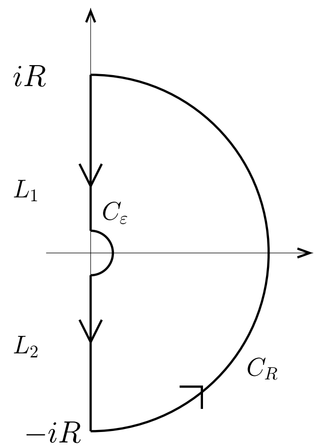


Nota: Las raíces de $1 + z^6$ *son* $z = e^{i(\pi/6)(2k+1)}$, $k = 0, \ldots, 5$.

(b) En este problema se deberá probar el siguiente resultado:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2+1}dx = \frac{\pi^3}{8}$$

Para ello, considere la función $f(z) = \frac{(Log(z))^2}{1-z^2}$ y el camino $K_{R,\epsilon} = C_R \cup L_1 \cup C_\epsilon \cup L_2$ dado en la figura



(i) Usando el Teorema de los Residuos, determine el valor de $\displaystyle\oint_{K_{R,\epsilon}} f(z)dz$ para $\epsilon < 1$ y $R > 1$.

(ii) Pruebe que:

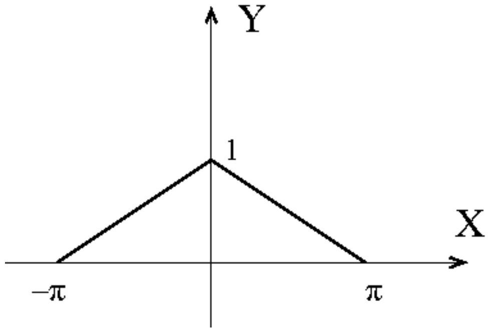
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)dz = 0$$

(iii) Pase al límite en las integrales $\int_{L_1} f(z)dz$ y $\int_{L_2} f(z)dz$ para $R \longrightarrow \infty$ y $\varepsilon \longrightarrow 0$, y deduzca el resultado solicitado.

<u>Indicaciones</u>:
(1) Recuerde que la determinación principal del logaritmo complejo se define como $Log(z) = \ln(|z|) + i\varphi$, en donde φ es el ángulo polar de z, considerado en $(-\pi, \pi]$.
(2) Puede usar que $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx = 0$ y que $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \pi/2$.

Pregunta 2.

(a) Encuentre la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función, afín por tramos, que se muestra en la figura:



(b) Considere la función $\hat{g} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\hat{g}(s,t) = e^{ist} e^{-ks^2 t} \quad k > 0 \text{ constante}$$

muestre que $\hat{g}$ es la Transformada de Fourier de:

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-(x+t)^2/4kt} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

donde la transformada se entiende tomada respecto a la variable x.

Indicación: Puede usar sin demostración que la transformada de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2/2}$ es $s \mapsto e^{-s^2/2}$ y recuerde que:

$$\widehat{f(x+a)}(s) = e^{isa}\widehat{f}(s) \; a \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{|a|}\widehat{f\left(\frac{x}{a}\right)}(s) = \widehat{f}(as) \; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Pregunta 3.

Para resolver el problema no homogéneo

$$\begin{array}{llr} \text{(EQ)} & \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3 & \forall x \in [0,\pi] \;\; \forall t > 0 \\ \text{(CB)} & u(0,t) = \pi \;, \quad u(\pi,t) = \pi(\pi+1) & \forall t > 0 \\ \text{(CI)} & u(x,0) = \pi & \forall x \in [0,\pi] \end{array}$$

proceda como se indica a continuación:

(a) Encuentre la solución de

$$\phi''(x) = -3, \quad \phi(0) = \pi, \quad \phi(\pi) = \pi(\pi+1).$$

(b) Llamando u a la solución del problema no homogéneo inicial, definamos v por medio de la identidad $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$. Encuentre las ecuaciones que satisface v.

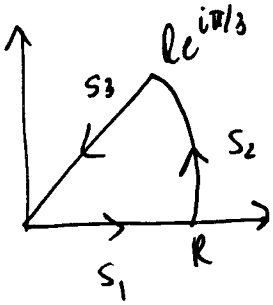
(c) Encuentre v usando el método de separación de variables.

(d) Encuentre explícitamente una expresión para u.

Puede utilizar las siguientes series o combinaciones lineales convenientes de ellas:

$$-\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n \sin(nx), \quad x(\pi - x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^{n+1})}{n^3} \sin(nx), \quad \text{para } x \in [0,\pi)$$

P1) a)



Calculemos $\displaystyle\oint_{S_R} \frac{z}{1+z^6}\,dz$

Notemos que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$,
sus polos son las raíces de q, osea: $z = e^{i\frac{\pi}{6}(2k+1)}$, $k \in \{0, \ldots, 5\}$
(pues no son raíces de $p(z) = z$)

Notar que si $R > 1$, S_R encierra solo al polo $z = e^{i\pi/6}$

$\therefore$ Por residuos: Si $R > 1$: $\displaystyle\oint_{S_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i\pi/6})$

Además, como todas las raíces son distintas, $z = e^{i\pi/6}$ es polo simple.

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, e^{i\pi/6}) = \lim_{z \to e^{i\pi/6}} \frac{(z - e^{i\pi/6})\, z}{1 + z^6} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{z \to e^{i\pi/6}} \frac{(z - e^{i\pi/6}) + z}{6z^5}$$

$$= \frac{e^{i\pi/6}}{6e^{i5\pi/6}} = \frac{1}{6e^{i4\pi/6}} = \frac{1}{6} e^{-i2\pi/3}$$

$$\therefore \oint_{S_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} e^{-i2\pi/3} = i\frac{\pi}{3} e^{-i2\pi/3}$$

Veamos el valor en cada segmento:

En S_1: $\displaystyle\int_{S_1} \frac{z}{1+z^6}\,dz \underset{\substack{\gamma(t) = t \\ t \in [0,R]}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^R \frac{t}{1+t^6}\,dt$, S_2: $\displaystyle\int_{S_2} f(z)\,dz \underset{\substack{\gamma(t) = Re^{it} \\ t \in [0, \pi/3]}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{\pi/3} \frac{Re^{it}}{1+R^6 e^{i6t}} \cdot iRe^{it}\,dt$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{iR^2 e^{2it}}{1+R^6 e^{i6t}}\,dt$$

S_3: $\displaystyle\int_{S_3} f(z)dz \underset{\uparrow}{=} \int_0^R \frac{(R-t)e^{i\pi/3}}{1+(R-t)^6 \underbrace{e^{i2\pi}}_{1}} \cdot (-e^{i\pi/3})\,dt = -\int_0^R \frac{(R-t)e^{i2\pi/3}}{1+(R-t)^6}\,dt$

$\gamma(t) = (R-t)e^{i\pi/3}$

$t \in [0,R]$

$\gamma' = -e^{i\pi/3}$

$$= -e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^R \frac{(R-t)}{1+(R-t)^6}\,dt \qquad \begin{array}{l} CV: \\ u = R-t \\ du = -dt \end{array}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_R^0 \frac{u}{1+u^6}\,du = -e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^R \frac{u}{1+u^6}\,du$$

$$\therefore \oint_{S_R} f(z)\,dz = \left(\int_0^R \frac{x}{1+x^6}\,dx\right)\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) + \int_{S_2} f(z)\,dz = i\frac{\pi}{3}e^{-i2\pi/3}$$

Luego, si $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{S_3} f(z)\,dz = 0$ Entonces: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx = \frac{\frac{\pi i}{3} e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}}$

$$= \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{1}{\left(\cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)}$$

pero $\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx = \frac{\pi \cancel{i}}{3} \cdot \frac{1}{2\cancel{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Probemos lo pendiente:

$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{S_2} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} i\int_0^{\pi/3} \frac{R^2 e^{2it}}{1+R^6 e^{i6t}}\,dt$, para ello notemos que: Si $R>1$

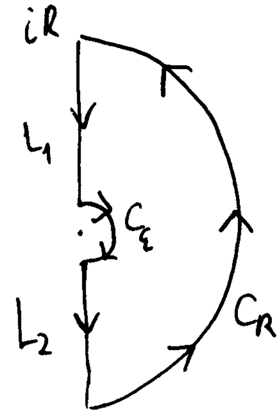
$$0 \leq \left| i\int_0^{\pi/3} \frac{R^2 e^{2it}}{1+R^6 e^{6it}}\,dt \right| \leq \int_0^{\pi/3} \frac{R^2 \overbrace{|e^{2it}|}^{=1}}{R^6 \underbrace{|e^{6it}|}_{1} - 1}\,dt = \frac{R^2}{R^6-1}\int_0^{\pi/3} dt = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{R^6-1}$$

así, $\forall R > 1$:

$$\left| \int_{S_2} f(z)\,dz \right| \le \frac{\pi}{3} \frac{R^2}{R^6 - 1} \xrightarrow[\text{si } R\to\infty]{} 0 \;,\; \therefore \lim_{R\to\infty} \int_{S_2} f(z)\,dz = 0 .$$

y por lo tanto: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

b) $K_{R,\varepsilon}$



$f(z) = \dfrac{(\operatorname{Log} z)^2}{1-z^2}$ $\qquad K_{R,\varepsilon} = C_\varepsilon \cup C_R \cup L_1 \cup L_2$.

i) Sea $\varepsilon < 1$ y $R > 1$, es claro que f es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ más aun, los únicos posibles polos de f en tal dominio son las raíces positivas de $1-z^2 \Rightarrow$ solo $z = 1$ es candidato a polo.

¿Lo es? Calculemos $\displaystyle\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{1-z^2}$ "$\frac{\infty}{\infty}$" $\qquad$ cont en $z=1$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{z\to 1} \frac{2 \operatorname{Log} z \cdot \frac{1}{z}}{2z} = \lim_{z\to 1} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} = 0$$

Luego $z = 1$ es singularidad evitable

$\therefore$ Por Teo. Residuos (o C-G): $\displaystyle\oint_{K_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 0 \quad \forall R>1, \forall \varepsilon < 1$ (al menos)

ii) Probemos primero que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0. \quad \text{Notar que } \int_{C_R} f(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{(\mathrm{Log}(Re^{it}))^2}{1-R^2e^{2it}} \cdot iRe^{it}\,dt$$

$\gamma(t) = Re^{it}$
$t \in [0, \pi/2]$
$\gamma'(t) = iRe^{it}$

pero: def. de log complejo!

$$\mathrm{Log}(Re^{it}) = \ln R + it$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Log}(Re^{it}))^2 = \ln^2 R + 2i\ln R \cdot t - t^2.$$

$$\therefore \int_{C_R} f(z)\,dz = i\int_0^{\pi/2} \frac{(\ln^2 R + 2i\ln R - t^2)\,Re^{it}}{1-R^2e^{2it}}\,dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \underset{\uparrow}{\leq} \int_0^{\pi/2} \left|\frac{\ln^2 R \cdot Re^{it}}{R^2-1}\right| dt + 2\int_0^{\pi/2} \frac{|\ln R \cdot Re^{it}|}{R^2-1}\,dt + \int_0^{\pi/2} \frac{|t^2 Re^{it}|}{R^2-1}$$

desig Δ

$\wedge\ |1-R^2e^{2it}| \geq \big|1 - |R^2e^{2it}|\big| = R^2-1$ si $R>1$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\ln^2 R \cdot R}{R^2-1} + \frac{2\ln R \cdot R}{R^2-1} + \frac{R}{R^2-1} \cdot \frac{(\pi/2)^3}{3}\right)$$

pero, como:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R\cdot\ln^2 R}{R^2-1} \overset{L'H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{\ln^2 R + \cancel{R}\cdot 2\ln R \cdot \frac{1}{\cancel{R}}}{2R} \overset{L'H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{2\ln R\cdot\frac{1}{R} + \frac{2}{R}}{2}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R} + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}}_{=0} \overset{L'H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{1}{R}}{1} = 0.$$

$$\text{y } \lim_{R\to\infty} \frac{2\ln R\cdot R}{R^2-1} \overset{L'H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{2\ln R + 2}{2R} \overset{L'H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{1}{R}}{1} = 0.$$

$$\text{y obviamente } \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2-1} = 0$$

de donde se deduce que (por Sandwich).

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$$

Veamos ahora que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$.

Como estudiaremos el lím con $\varepsilon \to 0$, para acotar sup. que $\varepsilon < 1$, y haciendo las mismas cotas que antes, se tiene:

$$\left| \int_{C_\varepsilon}^{*} f(z)\,dz \right| \leq \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\ln^2 \varepsilon \cdot \varepsilon e^{it}}{1-\varepsilon^2} \right| dt + 2\int_0^{\pi/2} \left| \frac{\ln \varepsilon \cdot \varepsilon e^{it}}{1-\varepsilon^2} \right| dt + \int_0^{\pi/2} t^2 \frac{\varepsilon \, |e^{it}|}{1-\varepsilon^2}\, dt$$

$$= \frac{\ln^2 \varepsilon \cdot \varepsilon}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{-\ln \varepsilon \cdot \varepsilon}{1-\varepsilon^2} \cdot \pi + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{\left(\pi/2\right)^3}{3}$$

Como $\lim_{\varepsilon\to 0} 1-\varepsilon^2 = 1$, para tener la conv. deseada basta ver que los lím de los numeradores son 0:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ln^2 \varepsilon \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln^2 \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \ \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \overset{L'H}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\ln\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = +2\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \ \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$$

$$\overset{L'H}{=} 2\cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = 2\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{-1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = 0.$$

y obviamente $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = 0$.

$\therefore$ Se concluye que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0 .$$

iii) Notemos que:

$$\int_{L_1} f(z)\,dz \underset{\substack{\gamma(t) = i(R-t)\\ t\in[0,R-\varepsilon]\\ \gamma'(t) = -i}}{=} \int_0^{R-\varepsilon} \frac{(\operatorname{Log}(i(R-t)))^2}{1-\underbrace{(i(R-t))^2}_{-(R-t)^2}} \cdot (-i)\,dt = -i \int_0^{R-\varepsilon} \frac{(\operatorname{Log}(i(R-t)))^2}{1+(R-t)^2}\,dt$$

$$= -i \int_0^{R-\varepsilon} \frac{\ln^2(R-t) + 2i\overbrace{\arg(i(R-t))}^{\pi/2\ \forall t} \cdot \ln(R-t) - \overbrace{\arg^2(i(R-t))}^{\pi^2/4}}{1+(R-t)^2}\,dt$$

$$= -i \int_0^{R-\varepsilon} \frac{\ln^2(R-t)}{1+(R-t)^2}\,dt + \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} \int_0^{R-\varepsilon} \frac{\ln(R-t)}{1+(R-t)^2}\,dt + i \int_0^{R-\varepsilon} \frac{\pi^2/4}{1+(R-t)^2}\,dt$$

$$\underset{\substack{CV\\ u=R-t\\ du=-dt}}{=} -i \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 u}{1+u^2}\,du + \pi \int_\varepsilon^R \frac{\ln u}{1+u^2}\,du + \frac{i\pi^2}{4}\int_\varepsilon^R \frac{1}{1+u^2}\,du$$

Tomando lím $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{L_1} f(z)\,dz = -i \int_0^\infty \frac{\ln^2 u}{1+u^2}\,du + \pi \overbrace{\cancel{\int_0^\infty \frac{\ln u}{1+u^2}\,du}}^{0} + i\,\frac{\pi^2}{4} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du}_{\pi/2}$$

$$= -i \int_0^\infty \frac{\ln^2 u}{1+u^2}\,du + i\,\frac{\pi^3}{8}$$

Análogamente.

$$\int_{L_2} f(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\log(it))^2}{1-(it)^2}\, i\,dt = -i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln^2 t + 2i\,\overbrace{\arg(it)}^{-\pi/2\ \forall t}\,\ln t - \overbrace{\arg^2(it)}^{\pi^2/4}}{1+t^2}\,dt$$

$\gamma(t) = -it$

$t \in [\varepsilon, R]$

$\gamma'(t) = -i$

$$= -i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln^2 t}{1+t^2}\,dt - \pi \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt + i\,\frac{\pi^2}{4}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dt}{1+t^2}$$

Tomando lím $\varepsilon \to 0 \wedge R \to \infty$:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{L_2} f(z)\,dz = -i\int_0^\infty \frac{\ln^2 t}{1+t^2}\,dt - \pi \overset{0}{\cancel{\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt}} + i\,\frac{\pi^2}{4}\cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}}_{\pi/2}$$

$$= -i\int_0^\infty \frac{\ln^2 t}{1+t^2}\,dt + i\,\frac{\pi^3}{8}.$$

Juntando todo:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \oint_{K_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz \underset{a)}{=} 0 \underset{b)+c)}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to 0}} \underbrace{\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz}_{\to 0} + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\to 0} + \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz$$

$$= -2i\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx + 2i\,\frac{\pi^3}{8}$$

$$\therefore\ 0 = 2i\left(\frac{\pi^3}{8} - \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx\right) \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^3}{8}}$$

Pauta p2 a

De la figura se deduce que f se expresa como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \\ 1 + \dfrac{x}{\pi} & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Notamos que f es par (por simetría en la figura respecto al eje y, o verificando que $f(-x) = f(x)$), luego la serie de Fourier queda expresada en cosenos:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\pi - \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}\Big) = 1$$

y

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} cos(nx)dx - \int_0^{\pi}\frac{x}{\pi}cos(nx)dx\Big] \end{aligned}$$

e integrando por partes queda:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\Big[\frac{sen(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\Big(\frac{xsen(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} sen(nx)dx\Big)\Big] \\ &\frac{2}{\pi}\Big[0 - \frac{1}{\pi}\Big(0 - \frac{1}{n^2}cos(nx)\Big|_0^{\pi}\Big)\Big] = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

y así se tiene que

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Puntajes: (1 Punto) por entender que la serie solo tiene cosenos, al tener una función par.
(2 Puntos) por calcular los coeficientes.

P21 b)

Pdq $\hat{g}(s,t) = e^{ist} e^{-ks^2 t}$ $k>0$ transf (en x) de

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-(x+t)^2/4kt}$$

Sol. Definamos $h(u) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{u^2/4kt}$

Así $\forall t$:

$$g(u,t) = h(u+t) \Leftrightarrow \hat{g}(s,t) = \widehat{h(u+t)}(s)$$
$$= \hat{h}(s) e^{ist}$$

Por otro lado:

$\hat{h}(s) = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{u^2/4kt}}$, pero, si $G(u) = e^{-u^2/2}$ $u \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\Rightarrow h(u) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} G\left(\frac{u}{\sqrt{2kt}}\right)$$

$$\therefore \hat{h}(s) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} \widehat{G\left(\frac{u}{\sqrt{2kt}}\right)}(s)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2kt}} \cdot \sqrt{2kt} \cdot \hat{G}(\sqrt{2kt}\, s) \quad (\text{Tomo } \lambda = \sqrt{2kt})$$

$$= \hat{G}(\sqrt{2kt} \cdot s) \underset{\text{ind.}}{=} e^{-\frac{s^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}kt} = e^{-s^2 kt}$$

$\therefore$ $\hat{g}(s,t) = \hat{h}(s) e^{ist} = e^{-s^2 kt} e^{ist}$ que era lo deseado. $\square$