Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, jueves 28 de junio 2012.

Profesores: J. Dávila,
J. González,
A. Hernández.
Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 3: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

P1.[6 ptos.] Usando el teorema de los residuos, calcule la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-isx}}{x^4-1}\,dx, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Indicación: separe los casos $s<0$, $s=0$ y $s>0$.

P2. Considerar la siguiente ecuación:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = & 0 & x \in (0,\pi), t>0 \\ u(x,0) = & \phi(x) & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = & T_1 & t>0 \\ u(\pi,t) = & T_2 & t>0, \end{cases}$$

donde ϕ es una función que se conoce de antemano, al igual que las constantes T_1 y T_2. Para resolver este problema defina

$$v(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\pi} x,$$

y considere el siguiente problema auxiliar

$$(2) \qquad \begin{cases} w_t - w_{xx} = & 0 & x \in (0,\pi), t>0 \\ w(x,0) = & \phi(x) - v(x) & x \in [0,\pi] \\ w(0,t) = & 0 & t>0 \\ w(\pi,t) = & 0 & t>0, \end{cases}$$

1. [3 ptos.] Resuelva el problema (2) mediante el método de separación de variables.
2. [0.5 ptos] Sea w^* la solución de (2). Muestre que $u = w^* + v$ es solución del problema original (1).
3. [1 pto.] Calcule el $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.
4. [1.5 ptos.] Encuentre explícitamente la solución u suponiendo que $T_1 = \pi$, $T_2 = 2\pi$ y $\phi(x) = x^2 + x + \pi$.

P3.

1. [2.5 ptos.] Sea $a > 1$. Encuentre el valor de

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t}\,dt$$

2. Sea $f(x) = |x|$ definida en $[-\pi,\pi]$ y extendida de forma 2π-periódica.
   a) [2 ptos.] Encuentre la serie de Fourier asociada a f.
   b) [1.5 ptos.] A partir de lo anterior muestre que

$$\sum_{n \text{ impar } \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Pauta C3 MA2002 2012-1

P1 Sean $R>0$ grande y $\varepsilon>0$ pequeño. Definamos

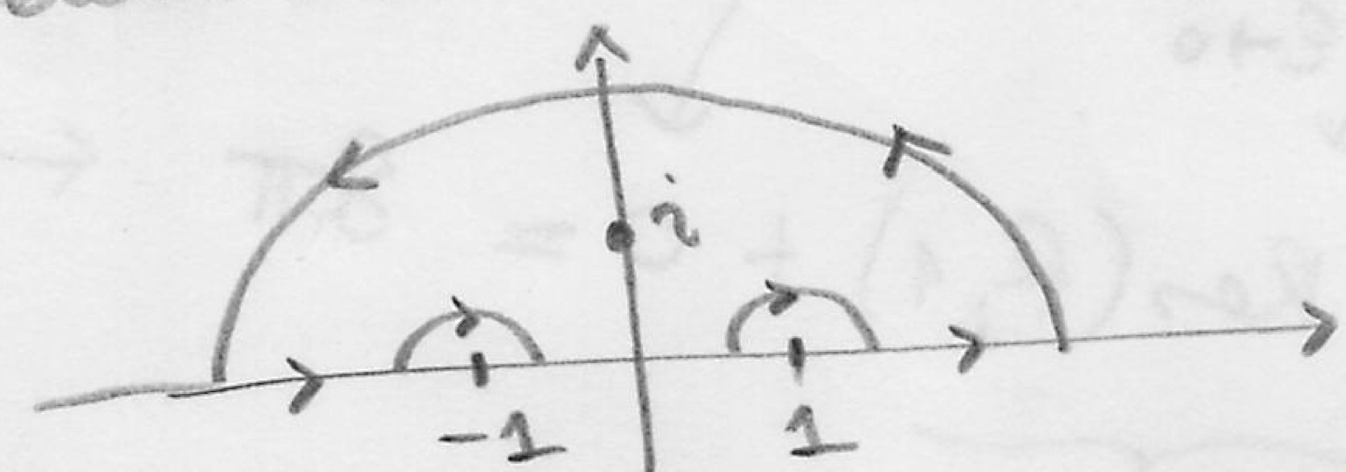
$L_R = [-R,R] \setminus \left((-1,-\varepsilon) \cup (1-\varepsilon,1+\varepsilon)\right)$

$C_R = \{z\in\mathbb{C} : |z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$

$c_{-1,\varepsilon} = \{z\in\mathbb{C} : |z+1|=\varepsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

$c_{1,\varepsilon} = \{z\in\mathbb{C} : |z-1|=\varepsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 0,4

Con la orientación de la figura: 0,2



Sea $f(z)=\frac{1}{z^4-1}$, $z\in\mathbb{C}\setminus P$ donde $P=\{\pm i,\pm 1\}$ son los polos de f.

Tenemos que $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ con p y q polinomios coprimos

y $\operatorname{gr} q \geq \operatorname{gr} p + 2$. Así

$\exists\, M, c \geq 0$, $\mu>0$ tal que

$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^\mu} \quad \forall z : |z|\geq M.$ 0,3

Por lo tanto $\lim\limits_{R\to 0}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

Sean $c^-_{\pm1,\varepsilon}$ los caminos $c_{\pm1,\varepsilon}$ con la orientación cambiada, i.e. con orientación antihorario, luego, ya que ±1 son polos simples de f, se tiene 0,3

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c^-_{\pm1,\varepsilon}} f(z)\,dz = i\pi \operatorname{Res}(f,\pm1).$$

Si $\gamma = L_R \cup C_R \cup c_{-1,\varepsilon} \cup c_{1,\varepsilon}$ con orientación positiva entonces, usando el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{L_R} f(z)\,dz + \int_{c_{-1,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{c_{1,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i)$$

tenemos

$$\int_{C_{\pm 1,\varepsilon}} f(z)dz = -\int_{C^{-}_{\pm 1,\varepsilon}} f(z)dz \,, \quad Res(f, i) = (2i)(-2) = -4i$$

0,3

$$Res(f,-1) = -4 \,, \quad Res(f,1) = 4$$

$$\int_{L_R} f(z)dz - \int_{C^{-}_{-1,\varepsilon}} f(z)dz - \int_{C^{-}_{1,\varepsilon}} f(z)dz + \int_{C_R} f(z) = -4i(2\pi i) \leftarrow 0{,}8$$

$$\downarrow R\to\infty \qquad \downarrow \varepsilon\to 0 \qquad \downarrow \varepsilon\to 0 \qquad \downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - \underbrace{i\pi\, Res(f,-1)}_{4\pi i} - \underbrace{i\pi\, Res(f,1)}_{-4\pi i} + 0 = 8\pi \leftarrow 0{,}5$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 8\pi.$$

Esto concluye el caso $s=0$.

caso $s<0$, dado que $gr\, q \geq gr\, p + 1$ se tiene que $\exists M, c \geq 0$ y $\mu > 0$ tq

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^{\mu}} \quad \forall z, |z| \geq M \,, \text{ y por tanto}$$

0,3

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{-isz} dz = 0 \quad \forall s<0$$

Al igual que antes ± 1 son polos simples de $g(z) = f(z)e^{-isz}$

por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C^{-}_{\pm 1,\varepsilon}} g(z)\,dz = i\pi\, Res(g, \pm 1)$$

0,3

Así

$$\int_{C_R} g(z)dz - \int_{C^{-}_{-1,\varepsilon}} g(z)dz - \int_{C^{-}_{1,\varepsilon}} g(z)\,dz + \int_{C_R} g(z)\,dz = 2\pi i\, Res(g, i)$$

0,8

$$\operatorname{Res}(g,-1) = \frac{-e^{is}}{4} \quad , \quad \operatorname{Res}(g,1) = \frac{e^{-is}}{4}$$

$$\operatorname{Res}(g,i) = \frac{e^{-isi}}{(-2)(2i)} = \frac{-e^{s}}{4i}$$

0,3

Tomando $\lim_{R\to+\infty}$ y $\lim_{\varepsilon\to 0}$ en la expresión anterior

tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-isx}}{x^4-1}\,dx = (2\pi i)\left(-\frac{e^{s}}{4i}\right) + -\frac{i\pi e^{is}}{4} + \frac{i\pi e^{-is}}{4}$$

$$= -\frac{\pi e^{s}}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{2i}\left(e^{is} - e^{-is}\right)$$

$$= -\frac{\pi e^{s}}{2} + \frac{\pi}{2}\sin s.$$

0,5

Para $s>0$ basta notar que $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-isx}}{x^4-1}\,dx$

es par, en efecto

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos sx)}{x^4-1} - i\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{(\sin sx)}{x^4-1}}_{\text{impar c/r a } x}\,dx \to 0$$

por integrar una función impar en un intervalo simétrico.

$$\therefore F(-s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(-sx)}{x^4-1}\,dx = \int_{-\infty} \frac{\cos sx}{x^4-1}\,dx$$

luego $F(s) = F(-s) \quad \forall \; s>0$

$$= -\frac{\pi e^{-s}}{2} - \frac{\pi}{2}\sin s.$$

Así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-isx}}{x^4-1}\,dx = \begin{cases} -e^{-|s|}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sin|s| & s\neq 0 \\ 8\pi & s=0. \end{cases}$$

1,0

P2

1. Usamos separación de variables: $w(x,t) = X(x)T(t)$, luego

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda \text{ cte}$$

0,5

$w(0,t)=0 \Rightarrow X(0)=0$
$w(\pi,t)=0 \Rightarrow X(\pi)=0$

$$A)\begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ X(0)=0 \\ X(\pi)=0 \end{cases} \qquad B)\begin{cases} T'-\lambda X=0 \end{cases}$$

solución de A): 3 casos: i) $\lambda>0$, ii) $\lambda=0$, iii) $\lambda<0$ 0,3

i) $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$X(0) = A+B=0 \Rightarrow B=-A$

$X(\pi) = Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} - Ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$

$= A(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0$

$\therefore A=0=B \Rightarrow w\equiv 0$ como buscamos soluciones no triviales descartamos el caso i)

0,2

ii) $X(x) = A+Bx$

$X(0)=A=0$

$X(\pi) = B\pi = 0 \Rightarrow w\equiv 0$, idem i) descartamos ii)

0,5

iii) $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}\pi$

$X(0) = A = 0$

$X(\pi) = B\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\pi = k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\therefore \lambda_k = -k^2 \quad k\in\mathbb{Z}$, como k está elevado al cuadrado basta tomar $k\in\mathbb{N}$.

$\therefore$ Para cada valor de k podemos tomar una cte A_k, resulta ser una solución de A)

y $X_k(x) = A_k \sin kx$

solución de B): $T_k(t) = e^{-k^2t}$ ← 0,5

$\therefore w_k(x,t) = A_k \sin kx \, e^{-k^2t}, \quad k\in\mathbb{N}$

luego $w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \, e^{-k^2 t}$ es

0,5

solución, para satisfacer la segunda condición de (2)

imponemos:

$$w(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = \phi(x) - v(x)$$

luego A_k son los coef. de Fourier de la extensión impar de la función $\phi(x) - v(x)$, ie

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\phi(x) - v(x)] \sin kx \, dx$$

0,5

2.- A) $u = w^* + v$

$$u_t = w^*_t + v_t$$

$$u_{xx} = w^*_{xx} + v_{xx}$$

$$u_t + u_{xx} = \underbrace{w^*_t + w^*_{xx}}_{0} + \underbrace{v_t + v_{xx}}_{0} = 0.$$

0,2

B) $u(x,0) = w^*(x,0) + v(x)$

$$= \phi(x) - v(x) + v(x) = \phi(x)$$

0,2

C) $u(0,t) = \underbrace{w^*(0,t)}_{0} + \underbrace{v(0)}_{T_1} = T_1$

D) $u(\pi,t) = \underbrace{w^*(\pi,t)}_{0} + \underbrace{v(\pi)}_{T_2} = T_2$

0,1

3.- $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \, e^{-k^2 t} + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\pi} x$

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{x}$$

1,0

3.- si $T_1 = \pi$, $T_2 = 2\pi$ y $\phi(x) = x^2 + x + \pi$

entonces $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \, e^{-k^2 t} + \pi + \frac{2\pi - \pi}{\pi} x$

luego $u(x,0) = x + \pi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = x^2 + x + \pi$

$\therefore A_k$ son los coef. de Fourier de la extensión impar de $f(x) = x^2$, ie

$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx$ — 0,7

$$\int x^2 \sin kx = -x^2 \frac{\cos kx}{k} + \int 2x \frac{\cos kx}{k}$$

$$= -\frac{x^2 \cos kx}{k} + 2x \frac{\sin kx}{k^2} - \int \frac{2 \sin kx}{k^2}$$

$$= -\frac{x^2 \cos kx}{k} + \frac{2x \sin kx}{k^2} + \frac{2 \cos kx}{k^3}$$ — 0,4

luego

$$A_k = -\frac{2\pi}{k} \cos k\pi + \frac{4}{\pi k^3} (\cos k\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi}{k} - \frac{8}{k^3 \pi} & k \text{ impar} \geq 1 \\ -\frac{2\pi}{k} & k \text{ par} \geq 2. \end{cases}$$ — 0,4

P3.- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t}\,dt = I$, $a>1$

$z = e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}\,dt \Rightarrow dt = \frac{1}{iz}dz$ 0,5

$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{1}{2z}(z^2+1)$

$a+\cos t = a + \frac{1}{2z}(z^2+1) = \frac{z^2+2az+1}{2z}$ 0,5

$\therefore\ I = \int_{|z|=1} \frac{2z}{z^2+2az+1}\frac{1}{iz}\,dz$ 0,5

$= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{(z+a-\sqrt{a^2-1})}\frac{1}{(z+a+\sqrt{a^2-1})}\,dz$

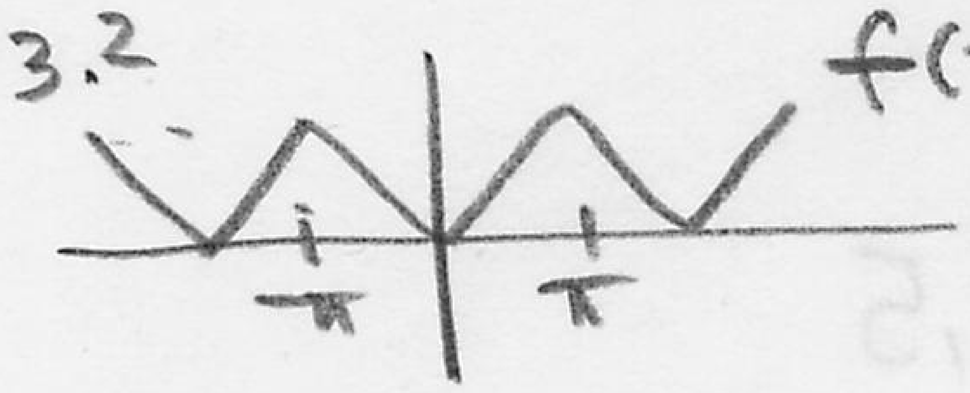
si $a>1$ entonces $|a+\sqrt{a^2-1}|<1$ y $|-a-\sqrt{a^2-1}|>1$ y ambos son 0,5

polos simples, por teo. de los residuos:

$I = 2\pi i\,\frac{2}{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2az+1}, -a+\sqrt{a^2-1}\right)$ 0,5

$= 4\pi\left(\frac{1}{-a+\sqrt{a^2-1}+a+\sqrt{a^2-1}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

P3.2



$f(x)=|x|$ extendida, sean a_n y b_n los coeficientes de Fourier de f

a) f par $\rightarrow$ $b_n = 0 \ \forall n$ $\leftarrow$ 0,5

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \underbrace{\cos nx}_{\frac{\sin' nx}{n}}\,dx \qquad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi \quad \leftarrow 0{,}3$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right) \qquad n \geq 1$$] 0,7

∴ La serie de Fourier de f es

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos nx$$] 0,5

b) f diferenciable a trozos y continua $\rightarrow$ f converge puntualmente (de hecho uniformemente] 0,5

$$\therefore\ f(0)=0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -2 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\therefore\ 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n \text{ impar}}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

] 1,0