CONTROL 3   MA26B   **Otoño-08**

P1. Calcule la siguiente integral:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{xsen(\alpha x)}{(x-1)(x^4+4)}dx.$$

Considere la integral de $f(z)e^{i\alpha z}$ sobre el contorno γ que se indica, y aplique la formula de los residuos (debe justificar que f(z) satisface las condiciones que requiere dicha formula: existen K > 0, p > o, tal que $|f(z)| \leq K/|z|^p$).

P2. Considere el problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<L, \ t>0,$$

$$u(x,0)=x^2, \quad 0<x<L, \quad \text{y} \quad u(0,y)=c, \ u(\pi,y)=d, \quad t>0.$$

(a) Compruebe que el MSV no resuelve (P).
(b) Sea u(x,t) = U(x,t) + f(x). Determine f de modo que el problema resultante (P_U) se puede resolver usando MSV.
(c) Resuelva (P_U) y obtenga la solución de (P) mediante la solución de (P_U).

P3. Considere el problema:

$$(P): \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0<x<\pi, \ y>0.$$

$$u(x,0)=0, \quad 0<x<\pi, \qquad u(0,y)=0, \ y>0, \quad u(\pi,y)=e^{-y}, \quad y>0.$$

(a) Resuelva (P) usando MSV.
(b) Resuelva (P) usando T. de Fourier.
(Debe calcular la integral y la T. de Fourier de $f(x) = e^{-y}$).

S. de F. de f en $[-L,L]$: $a_0 + \sum_1^\infty [a_n\cos(n\pi x/L) + b_n(n\pi x/L)]$, $\quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$,

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)dx$, $\quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(n\pi x/L)dx$.

S. de F. de f en cosenos en $[-L,L]$: $a_0 + \sum_1^\infty [a_n\cos(n\pi x/L)]$, $\quad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$,

$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)dx$,

S. de F. de f en cosenos en $[-L,L]$: $\sum_1^\infty [b_n(n\pi x/L)]$, $\quad b_n = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(n\pi x/L)dx$.

	Transformada	*Fórmula de inversión*	*Fórmula de operación*
de Fourier en cosenos	$\mathscr{F}_C\{f(x)\} = F_C(\omega) = \int_0^\infty F(x)\cos(\omega x)\,dx$	$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_C(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$	$\mathscr{F}_C\{f''(x)\} = -\omega^2 F_C(\omega) - f'(0)$
de Fourier en senos	$\mathscr{F}_S\{f(x)\} = F_S(\omega) = \int_0^\infty f(x)\text{sen}(\omega x)\,dx$	$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_S(\omega)\text{sen}(\omega x)\,d\omega$	$\mathscr{F}_S\{f''(x)\} = -\omega^2 F_S(\omega) + \omega f(0)$

Pauta P1 CONTROL 3 MA26B OTOÑO-08

P3. Calcular la integral: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(\alpha x)}{(x-1)(x^4+4)}\,dx$

(1) Existen $K>0$, $p>0$, tal que $\left|\dfrac{z e^{i\alpha z}}{(z-1)(z^4+4)}\right| \le \dfrac{K}{R^p}$, $z = Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$. $(R\gg 1)$

(1.0)
$|z| = R$, $|z-1|^2 = (Re(z)-1)^2 + Im^2(z) = R^2 - 2Re(z) + 1 = R^2 - 2R\cos\theta + 1 \ge R^2 - 2R + 1 = (R-1)^2$

$|z^4+4|^2 = |R^4 e^{i4\theta} + 4| = (R^4\cos4\theta + 4)^2 + R^8\,\mathrm{sen}^2 4\theta) = R^8 + 8R^4\cos4\theta + 16 \ge R^8 - 8R + 16 = (R^4-4)^2$

y por lo tanto, $\left|\dfrac{z}{(z-1)(z^4+4)}\right| \le \dfrac{R}{(R-1)(R^4-4)} \approx \dfrac{1}{R^4}$

(0.5)
Además, $|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha R e^{i\theta}}| = |e^{-\alpha R\,\mathrm{sen}\theta}\cdot e^{i\alpha R\cos\theta}| = |e^{-\alpha R\,\mathrm{sen}\theta}| \le 1$, ya que $\mathrm{sen}\theta \ge 0$ $0\le\theta\le\pi$, ($|e^{i\varphi}|=1$)

y las desigualdades obtenidas implican el resultado con $K = 1$ y $p = 4$.

(2) Calculo de la integral mediante residuos. Se considera la integral compleja:

$$\int_\gamma F(z)\,dz = \int_\gamma \frac{z e^{i\alpha z}}{(z-1)(z^4+4)}\,dz, \text{ y por residuos } \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Im\, z_k>0} Res(F,z_k) + \pi i \sum_{z_\ell \text{ real}} Res(F,z_\ell)$$

(1.5)
Polos de F: $(z-1)(z^4+4) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-2i)(z^2+2i) = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2i};\ z_2 = -\sqrt{2i};\ z_3 = i\sqrt{2i};\ z_4 = -i\sqrt{2i};\ z_5 = 1$

(los z_k son polos simples, $z_k e^{i\alpha z_k} \ne 0$, $k=1,\dots,5$), y como $\sqrt{2i} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$

se tiene que $z_1 = 1+i$; $z_2 = -1-i$; $z_3 = -1+i$; $z_4 = 1-i$, implicando $Im\, z_k > 0$, $k=1,3$, y por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\omega x}}{(x-1)(x^4+4)}\,dx = 2\pi i\,[Res(F,z_1) + Res(F,z_3)] + \pi i\,Res(F,z_5)$$

(1.0)
Res (F, z_1): $z_1 = 1+i$

$$\lim_{z\to z_1} (z-z_1)F(z) = \lim_{z_1} \frac{z e^{\alpha i z}}{(z-z_2)(z^2+2i)(z-1)} = \frac{(1+i)e^{i\alpha(1+i)}}{2(1+i)(2i+2i)i} = -\frac{e^{-\alpha}}{8}(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha)$$

(1.0)
Res (F, z_3): $z_3 = -1+i$

$$\lim_{z\to z_3} (z-z_3)F(z) = \lim_{z_3} \frac{z e^{\alpha i z}}{(z^2-2i)(z-z_4)(z-1)} = \frac{(-1+i)e^{\alpha i(-1+i)}}{(-4i)(-2+2i)(-2+i)} = \frac{e^{-\alpha} i e^{-i\alpha}}{8(-2+i)} = \frac{e^{-\alpha} i(-2-i)e^{-i\alpha}}{40} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{40}(1-2i)(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{40}[(\cos\alpha - 2\,\mathrm{sen}\alpha) + i(-\mathrm{sen}\alpha - 2\cos\alpha)]$$

(0.5)
Res (F, z_5): $z_5 = 1$

$$\lim_{z\to z_5} (z-z_5)F(z) = \lim_{z_5} \frac{z e^{i\alpha z}}{(z^4+4)} = \frac{e^{i\alpha}}{5} = \frac{1}{5}(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha)$$

$Res(F, z_1) + Res(F, z_3) = -\dfrac{e^{-\alpha}}{20}(2\cos\alpha + \mathrm{sen}\alpha) + i\,\dfrac{e^{-\alpha}}{20}(-\cos\alpha - 3\,\mathrm{sen}\alpha)$, resulta

(0.5)
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\alpha x}}{(x-1)(x^4+4)}\,dx = \left[\frac{\pi}{10}e^{-\alpha}(\cos\alpha - 3\,\mathrm{sen}\alpha) + i\,\frac{\pi}{10}e^{-\alpha}(-2\cos\alpha - \mathrm{sen}\alpha)\right] + \left(-\frac{\pi}{5}\mathrm{sen}\alpha + i\frac{\pi}{5}\cos\alpha\right)$$

y como $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(\alpha x)}{(x-1)(x^4+4)}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(\alpha x)}{(x-1)(x^4+4)}\,dx$, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(\alpha x)}{(x-1)(x^4+4)}\,dx = \frac{\pi}{10}\left[2(1-e^{-\alpha})\cos\alpha - e^{-\alpha}\mathrm{sen}\alpha\right]$$

Pauta P2 CONTROL 3 MA26B OTOÑO-08

P2. (P): $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<L$, $t>0$; $u(x,0)=x^2$, $0<x<L$; $u(0,t)=c$, $u(L,t)=d$, $t>0$.

a) MSV no resuelve (P)

(0.5) 1. Se supone que $u(x,t)=X(x)T(t)$, y al reemplazar en la EDP de (P) implica:
$XT' = a^2 X''T \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T} = -\lambda$, $\rightarrow$ $X''+\lambda X=0$ y $T'+\lambda a^2 T=0$.

2. Condiciones de (P) que se pueden traspasar.

(1.0)
$u(x,0)=x^2 \longrightarrow X(x)T(0)=x^2$, No se traspasa (caso contrario, $X(x)$ sería un múltiplo de x^2).
$u(0,t)=c \longrightarrow X(0)T(t)=c$, No se traspasa (caso contrario, T sería constante)
$u(L,t)=d \longrightarrow X(L)T(t)=d$, No se traspasa (idem, caso anterior).
Por lo tanto, ninguna condicion de (P) se puede traspasar, y el metodo no se puede seguir aplicando.

b) Sea $u(x,t)=U(x,t)+f(x)$. Se determina f de modo que (P_U) se puede resolver con el MSV, donde (P_U) se obtiene al reemplazar $u=U+f$ en (P).

(0.5) Reemplazo en la EDP de (P) implica: $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f''(x)$, para que sea homogenea, $f''(x)=0$
$f''(x)=0$, implica $f(x)=\alpha x+\beta$, y los coeficentes α, β se determinan con las condiciones de (P)

(1.0) $u(0,t)=c$ y $u(L,t)=d$ implican $U(0,t)+f(0)=c$ y $U(L,t)+f(L)=d$, y si se impone que $U(0,t)=U(L,t)=0$, se debe cumplir: $f(0)=c$ y $f(L)=d$, lo que implica: $\beta = c$ y $\alpha=(d-c)/L$
El problema resultante es:

$$(P_U): \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0<x<L;\ U(0,t)=U(L,t)=0,\ t>0;\ U(x,0)=x^2-f(x).$$

c) Solucion de (P_U)

(1.0)
1. $U=XT$, y la EDP de (P_U) implica $XT'=a^2X''T$, y se obtiene: $X''+\lambda X=0$ y $T'+\lambda a^2 T=0$
2. Condiciones traspasables de (P_U):
- $U(x,0)=x^2-f(x) \rightarrow X(x)T(0)=x^2-f(x)$, No se traspasa ($X(x)$ sería un multiplo de $x^2-f(x)$)
- $U(0,t)=0 \longrightarrow X(0)T(t)=0 \longrightarrow X(0)=0$, Si se traspasa ($T(t)=0$, implicaría $u=0$)
- $U(L,t)=0 \longrightarrow X(L)T(t)=0 \longrightarrow X(L)=0$, si se traspasa ($T(t)=0$, implicaría $u=0$)

Los problemas resultantes son: (P_X): $X''+\lambda X=0$, $0<x<L$, $X(0)=X(L)=0$; (P_T): $T'+\lambda a^2T=0$, $t>0$.

3. Solucion de (P_X) y (P_T). Se consideran todos los posibles valores de λ. Primero se resuelve (P_X)

(1.5)
Caso $\lambda=0$: $X''=0$, implica $X(x)=\gamma x+\delta$, pero $X(0)=X(L)=0$, implican $\gamma=\delta=0$, i.e., $X=0$ (se descarta $\lambda=0$)
Caso $\lambda<0$: $\lambda=-k^2$, $X''-k^2X=0$, implica $X(x)=\gamma e^{kx}+\delta e^{-kx}$, $X(0)=0$ implica $\gamma+\delta=0$, i.e, $\delta=-\gamma$,
$X(x)=\gamma(e^{kx}-e^{-kx})$, y $X(L)=0$, implica $\gamma(e^{kL}-e^{-kL})=0$, resultando $X=0$ (se descarta $\lambda<0$)
Caso $\lambda>0$: $\lambda=k^2$ $(k>0)$. $X''+k^2X=0$, implica $X(x)=\gamma\cos(kx)+\delta\,\mathrm{sen}(kx)$; $X(0)=0$ implica $\gamma=0$
i.e. $X(x)=\delta\,\mathrm{sen}(kx)$, $X(L)=0$ implica $\delta\,\mathrm{sen}(kL)=0$, resultando $kL=n\pi$, y por lo tanto,
$X_n(x)=\delta_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, es solucion de (P_X), para $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$, $n=1,2,\ldots$
Con $\lambda=k^2=n^2\pi^2/L^2$ se resuelve (P_T): $T'+k^2a^2T=0$, obteniendose $T_n(t)=\alpha e^{-n^2\pi^2a^2t/L}$
y por lo tanto, $U_n=X_n(x)T_n(t)=A_n\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)\,e^{-n^2\pi^2a^2t/L^2}$, es solucion de $(P')=(P)-(c.n.t.)$

4. Principio de superposicion: $U(x,t)=\sum_{n\geq 1}U_n(x,t)$ es solucion de (P'). A_n se determina con c.n.t.

(0.5)
$U(x,0)=x^2-f(x) \rightarrow x^2-f(x)=\sum_{n\geq1}A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, S. de F. en senos $\longrightarrow A_n=\frac{2}{L}\int_0^L(x^2-f(x))\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$
$\int_0^L x^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{L}{n\pi}x^2\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L+\frac{2L}{n\pi}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=(-1)^{n+1}\frac{L^3}{n\pi}-\frac{4L^2}{n^2\pi^2}\int_0^L\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=(-1)^{n+1}\frac{L^3}{n\pi}+\frac{4L^3}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)$
$\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\int_0^L(\alpha x+\beta)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=(\alpha x+\beta)\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L-\int_0^L\frac{\alpha L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{dL}{n\pi}(-1)^n-\frac{cL}{n\pi}$ //

La solucion de (P) se obtiene como $u(x,t)=U(x,t)+f(x)$, U solucion de (P_U).

Pauta P3 CONTROL 3 MA26B OTOÑO-08

(P): $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0<x<\pi,\ y>0;\ u(x,0)=0,\ 0<x<\pi;\ u(0,y)=0,\ u(\pi,y)=e^{-y},\ y>0.$

a) Resolver (P) mediante MSV.

(0.5) 1. $u(x,y) = X(x)Y(y)$, aplicado en la EDP resulta: $X''Y + XY'' = 0$, implicando $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$ y se obtienen las EDO: $X'' + \lambda X = 0$ y $Y'' - \lambda Y = 0$

2. Condiciones de (P) traspasables:

- $u(x,0) = 0 \to X(x)Y(0) = 0 \to Y(0) = 0$ (se traspasa)
- $u(0,y) = 0 \to X(0)Y(y) = 0 \to X(0) = 0$ (se traspasa)
- $u(\pi,y) = e^{-y} \to X(\pi)Y(y) = e^{-y}$ (no se traspasa, caso contrario $Y(y)$ sería múltiplo de e^{-y}).

Los problemas resultantes son: (P_x): $X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0$; (P_y): $Y'' - \lambda Y = 0,\ Y(0) = 0$.

3. Solución de (P_x) y (P_y) según valores de λ. (Para (P_x))

(0.5) Caso $\lambda = 0$: $X'' = 0 \to X(x) = \alpha x + \beta$. Como $X(0) = 0$, implica $\beta = 0 \to X(x) = \alpha x$, $0<x<\pi$.

Caso $\lambda < 0$: $(\lambda = -k^2)$. $X'' - k^2X = 0 \to X_1(x) = \gamma e^{kx} + \delta e^{-kx}$. Pero $X(0) = 0 \to \delta + \gamma = 0 \to \delta = -\gamma$

$X(x) = \gamma(e^{kx} - e^{-kx})$, $0<x<\pi$

Caso $\lambda > 0$: $(\lambda = k^2)$ $X'' + k^2X = 0 \to X(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$, y $X(0) = 0 \to a = 0$,

$X(x) = b\,\mathrm{sen}(kx)$, $0<x<\pi$.

Lo anterior implica que (P_x) tiene solución para todo λ.

- Solución de (P_y):

(0.5) Caso $\lambda = 0$: $Y'' = 0 \to Y(y) = cy + d$, pero $Y(0) = 0 \to d = 0 \to Y(y) = cy$, No acotada ($\lambda = 0$ se descarta)

Caso $\lambda < 0$ $(\lambda = -k^2)$: $Y'' + k^2Y = 0 \to Y(y) = c\cos(ky) + d\,\mathrm{sen}(ky)$, $Y(0) = 0 \to c = 0 \to Y(y) = d\,\mathrm{sen}(ky), y>0$

Caso $\lambda > 0$ $(\lambda = k^2)$: $Y'' - k^2Y = 0 \to Y(y) = \gamma e^{ky} + \delta e^{-ky}$, $Y(0) = 0 \to \delta = -\gamma \to Y = \gamma(e^{ky} - e^{-ky})$ No acotada

Lo anterior implica que (P_x) y (P_y) tienen solución para $\lambda < 0$:

$X_k(x) = a_k(e^{kx} - e^{-kx}),\ 0<x<\pi,\ Y_k(y) = b_k\,\mathrm{sen}(ky),\ y>0 \to u_k(x,y) = A_k(e^{kx} - e^{-kx})\,\mathrm{sen}(ky),\ \begin{matrix}0<x<\pi\\ y>0\end{matrix}$

solución de $(P') \equiv (P) - (\text{c.n.t.})$

4. Principio de superposición: $u(x,y) = \int_0^\infty u_k(x,y)\,dk = \int_0^\infty A_k(e^{kx} - e^{-kx})\,\mathrm{sen}(ky)\,dk$, (sol. de (P'))

(0.5) A_k se calcula usando la condición: $u(\pi,y) = e^{-y}$

$u(\pi,y) = e^{-y} \to e^{-y} = \int_0^\infty A_k(e^{k\pi} - e^{-k\pi})\,\mathrm{sen}(ky)\,dk = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B_k\,\mathrm{sen}(ky)\,dk$, donde $B_k = 2\pi A_k\,\mathrm{senh}(k\pi)$

es el coeficiente de la I. de F. en senos de e^{-y}, i.e., $B_k = 2\int_0^\infty e^{-s}\,\mathrm{sen}(ks)\,ds = \frac{2k}{1+k^2}$

y por lo tanto, $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{k}{\mathrm{senh}(k\pi)(1+k^2)}(e^{kx} - e^{-kx})\,\mathrm{sen}(ky)\,dk.$

(b) Resolver (P) usando T. de Fourier

(2.0) Como $0<x<\pi$ y $y>0$, se debe usar T. de F. en seno o coseno c/r a y. Además, como la EDP de (P) contiene a $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, la condición $u(x,0) = 0$ determina la elección de la T. de F. en seno c/r a y. Si $U_s = (TF)_s(u)$, entonces

$(TF)_s\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = (TF)_s(0) \longrightarrow \frac{d^2U}{dx^2}(x,\omega) - \omega^2 U_s(x,\omega) + \omega u(x,0) = 0$,

y la ecuación resultante es: $U_s'' - \omega^2 U_s = 0$, cuya solución es: $U_s(x,\omega) = A(\omega)e^{\omega x} + B(\omega)e^{-\omega x}$

(2.0) Como $u(0,y) = 0 \to U_s(0,\omega) = 0 \to A(\omega) + B(\omega) = 0 \to U_s(x,\omega) = 2A(\omega)\,\mathrm{senh}(\omega x)$

Para determinar $A(\omega)$ se usa la condición $u(\pi,y) = e^{-y}$, i.e., $(TF)_s(u(\pi,y)) = (TF)_s(e^{-y})$

y por definición $(TF)_s(e^{-y}) = \int_0^\infty e^{-y}\,\mathrm{sen}(\omega y)\,dy = \frac{\omega}{1+\omega^2}$, y como $(TF)_s(u(\pi,y)) = U_s(\pi,\omega)$

resulta que $A(\omega)\,\mathrm{senh}(\omega\pi) = \frac{\omega}{2(1+\omega^2)}$, y por lo tanto, $U_s(x,\omega) = \frac{\omega\,\mathrm{senh}(\omega x)}{\mathrm{senh}(\omega\pi)(1+\omega^2)}$

y la solución de (P) se obtiene: $u(x,y) = (TF)_s^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U_s(s,\omega)\,\mathrm{sen}(\omega s)\,ds$ //