Pauta Control 2
Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2013/2

Prof: J. Dávila, Auxiliares: R. Bobadilla, A. Bustos

Pregunta 1.

(a) (2 ptos.) Exprese $f(x) = 1$ como serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

(b) (1 pto.) Utilizando la serie anterior, encuentre los valores de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1}.$$

(c) (3 ptos.) Por medio de separación de variables, encuentre la forma más general de una solución de

$$\begin{aligned} tu_t &= u_{xx} + 2u, \quad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned}$$

Muestre que hay infinitas soluciones distintas que satisfacen la condición $u(x,0) = 0$.

Solución.

(a) Esto equivale a la extensión periódica impar de $f(x) = 1$ a todo $\mathbb{R}$, con período 2π; así, tendremos que los coeficientes de Fourier de f extendida de esta manera quedan dados por la relación:

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{0} (-1)\sin(kx)\,dx + \int_0^{\pi} (+1)\sin(kx)\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx$$

Observación. Es válido recordar que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$$

con

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx.$$

1 pto por recordar esta fórmula o argumentar con extensión periódica impar

De este modo:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\cdot \frac{-\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos(k\pi)}{k} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k}$$

de modo que

$$a_k = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}.$$

Por lo tanto, para $x \in (0,\pi)$ se tiene que: 1 pto. cálculo a_k

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

(b) Observemos que ambas series son del tipo obtenido en la parte (a), sin el factor $4/\pi$.

idea de evaluar en $\pi/2$: 0,3

La primera suma se obtiene de evaluar la serie de Fourier en $x = \frac{1}{2}\pi$, ya que en este caso $\sin((2k+1)x) = \sin(\frac{2k+1}{2}\pi)$, valor que para $k = 0$ es 1 y cambia de signo al pasar de k a $k+1$ pues $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$; luego

$$\sin(\frac{2k+1}{2}\pi) = (-1)^k.$$

Como $\frac{1}{2}\pi \in (0,\pi)$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

resultado: 0,2

idea de evaluar en 1: 0,3

Notemos que la segunda suma corresponde a la serie obtenida en la parte (a) multiplicada por una constante y evaluada en 1. Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

resultado: 0,2

(c) Para aplicar separación de variables, supongamos que existen funciones X, T de una variable tales que

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

plantear la forma de separación de variables: 0,3

De este modo, la ecuación tiene la forma:

$$tX(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 2X(x)T(t)$$

o bien:

$$t\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 2 = \lambda$$

llegar a esta ecuación: 0,4

con $\lambda \in \mathbb{R}$ constante, pues en un lado depende solamente de x y en el otro solamente de t. Fijando λ, vemos entonces que las soluciones obtenidas de esta manera satisfarán:

$$\frac{d}{dt}\ln(T(t)) = \frac{\lambda}{t} \implies \ln(T(t)) = \lambda\ln(t) + \ln(|c|) \implies T(t) = Ct^{\lambda}$$

resolver ecuación para T: 0,4

para alguna constante C. De igual modo, para la misma constante λ obtenemos la ecuación para X:

$$X''(x) - (\lambda - 2)X(x) = 0 \implies X(x) = Ae^{x\sqrt{\lambda-2}} + Be^{-x\sqrt{\lambda-2}}$$

resolver ecuación para X, forma general: 0,4

La igualdad anterior es válida para $\lambda \neq 2$, obteniéndose para $\lambda = 2$ la solución $X(x) = A + Bx$. De este modo, el método de separación de variables nos da soluciones de la forma:

- Para $\lambda > 2$: $u(x,t) = t^{\lambda}(c_1e^{x\sqrt{\lambda-2}} + c_2e^{-x\sqrt{\lambda-2}})$
- Para $\lambda < 2$: $u(x,t) = t^{\lambda}(c_1\cos(x\sqrt{2-\lambda}) + c_2\sin(x\sqrt{2-\lambda}))$
- Para $\lambda = 2$: $u(x,t) = t^{\lambda}(c_1 + c_2x)$

descartar $\lambda \geq 2$: 0,3

De aquí se ve inmediatamente que si $\lambda \geq 2$ no es posible cumplir ambas condiciones de borde, a menos que $u = 0$, que descartamos. Consideramos entonces solamente $\lambda < 2$ y por la condición de borde $c_1 = 0$ y además

$$\sin(\pi\sqrt{2-\lambda}) = 0,$$

por lo que $\sqrt{2-\lambda} = k$, con k un entero positivo, y entonces

$$\lambda = 2 - k^2.$$

Encontramos entonces soluciones $u_k(x,t)$ de la forma

forma de λ: 0,3

$$u_k(x,t) = c_k t^{2-k^2} \sin(kx)$$

para k entero positivo.

forma de u_k: 0,3

Proponemos como solución general una combinación lineal infinita de términos $u_k(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{2-k^2} \sin(kx).$$

Esta es la forma general pedida.

serie u_k: 0,3

Finalmente, vemos que para $k = 1$

$$u(x,t) = c_1 t \sin(x)$$

es solución con condición incial 0 en $t = 0$. Son infinitas porque c_1 es arbitraria.

reconocer soluciones con condición inicial 0: 0,3

Pregunta 2.

(a) (3 ptos.) Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-4)}.$$

(b) (3 ptos.) Resuelva el problema de condiciones de borde

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ &u(x,y) \to 0 \quad \text{si } \|(x,y)\| \to \infty, \end{aligned}$$

donde f es una función continua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty$. Exprese la solución u como una integral que involucre f.

Ind: $\widehat{\frac{a}{a^2+x^2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}$ si $a > 0$.

Solución.

idea de fracciones parciales

(a) Por fracciones parciales:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-4)} = \frac{1}{5}\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{5}\frac{1}{x^2+1}$$

y entonces

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{5}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-isx}}{x^2-4}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{5}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-isx}}{x^2+1}dx$$

definción de transformada de Fourier (no es importante el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)

Calculemos por separado cada integral.

Para $s \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{x^2-4}dx = -\pi i Res(f,2) - \pi i Res(f,-2)$$

fórmula con residuos: 0,4

Se puede argumentar de la siguiente manera. Sea Γ^- el camino dado por la semicircunferencia de radio R en el semiplano inferior. Usando teorema de los residuos

$$\int_R^{-R} \frac{e^{-isx}}{x^2-4} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-isR\cos\theta}e^{sR\sin\theta}}{R^2e^{2i\theta}-4}Rie^{i\theta}d\theta = \pi i Res(f,2) + \pi i Res(f,-2)$$

Notemos que en la segunda integral la exponencial real tiene exponente negativo pues $\theta \in [\pi, 2\pi]$ y por lo tanto $\sin\theta \leq 0$. Así, por un teorema visto en clases la segunda integral se va a 0 cuando $R \to \infty$. Notar que en la fórmula de residuos se usa solo πi pues los polos están en el borde y que todos los polos son de orden 1. (Ojo que la primera integral tiene cambiados los límites de integraciń pues estamos recorriendo el camino en sentido antihorario).

no hay puntaje por el argumento, solamente identificar la fórmula correcta

Para $s < 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{x^2-4}dx = \pi i Res(f,2) + \pi i Res(f,-2)$$

fórmula: 0,4

El argumento es exactamente el mismo pero debe tomarse el camino Γ^+ dado por la semicircunferencia de radio R en el semiplano superior. As también tendremos una exponencial negativa en la segunda integral que aparece y por lo tanto se podr justificar que se va a 0 cuando $R \to \infty$.

Para resolver la segunda integral se procede exactamente igual: Para $s > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{x^2+1} dx = -2\pi i Res(f, -i),$$

y para $s < 0$ fórmula: : 0,4

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{x^2+1} dx = 2\pi i Res(f, i).$$

fórmula: : 0,4

Cálculo de residuos. Para la primera integral

$$Res(f, 2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{e^{-isz}}{z^2-4} = \lim_{z\to 2}\frac{e^{-isz}}{z+2} = \frac{e^{-2is}}{4}$$

$$Res(f, -2) = \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{e^{-isz}}{z^2-4} = \lim_{z\to 2}\frac{e^{-isz}}{z-2} = -\frac{e^{2is}}{4}.$$

Así el resultado se puede condensar en: residuos: 0,4

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{x^2-4} dx = \frac{\pi}{2}\sin(-2|s|).$$

Para la segunda, cuando $s > 0$

$$Res(f, -i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{-isz}}{z^2+1} = \lim_{z\to -i}\frac{e^{-isz}}{z-i} = \frac{e^{-s}}{-2i} = i\frac{e^{-s}}{2}$$

Y cuando $s < 0$

$$Res(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{-isz}}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{e^{-isz}}{z+i} = \frac{e^{s}}{2i} = -i\frac{e^{s}}{2}$$

Y lo anterior se condensa en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|s|}.$$

residuos: 0,4

Luego la solución es:

también se puede usar la indicación de la parte b). Dar puntaje equivalente

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\pi}{5}\sin(-2|s|) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{5}e^{-|s|} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{5}\sin(2|s|) + \frac{\sqrt{\pi}}{5\sqrt{2}}e^{-|s|}.$$

resultado: 0,6

(b) Tenemos la EDP

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

y la condición de borde

$$\partial_y u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tomemos la transformada de Fourier con respecto a x, es decir definamos

transformada de Fourier en una variable: 0,4

$$\hat{u}(s, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs}u(x, y)\, dx.$$

Entonces la ecuación queda

$$(is)^2\hat{u}(s, y) + \partial_{yy}\hat{u}(s, y) = 0$$

que es equivalente a

$$\partial_{yy}\hat{u}(s, y) = s^2\hat{u}(s, y)$$

ecuación transformada: 0,4

Resolvemos la EDO como si s fuera una constante:

$$\hat{u}(s,y) = A(s)e^{sy} + B(s)e^{-sy}.$$

solución general: 0,4

Como la función original tiende a 0 cuando $y \to \infty$, entonces pediremos lo mismo para su transformada de Fourier. Por lo tanto si $s > 0$ pediremos $A(s) = 0$ y si $s < 0$ entonces $B(s) = 0$. (Notar que lo anterior tiene sentido pues $y > 0$ y solo hay que preocuparse por el signo de s). Así, podemos escribir

$$\hat{u}(s,y) = D(s)e^{-|s|y}.$$

descartar un término: 0,3

La condición en $y = 0$ queda:

$$\partial_y \hat{u}(s,0) = \hat{f}(s).$$

Usando la fórmula que encontramos anteriormente, tenemos que

$$\partial_y \hat{u}(s,0) = -D(s)|s|$$

y por lo tanto

$$-D(s)|s| = \hat{f}(s),$$

es decir

$$D(s) = -\frac{\hat{f}(s)}{|s|}.$$

usar condición de borde: 0,4

Finalmente, hemos encontrado

$$\hat{u}(s,y) = -\hat{f}(s)\frac{e^{-|s|y}}{|s|}.$$

fórmula para $\hat{u}$: 0,4

Podemos escribir u como la convolución de f con una función g tal que su transformada con respecto a x sea

$$\frac{e^{-|s|y}}{|s|}$$

(con un signo $-$ y un factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$). De la indicación tenemos

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\widehat{\frac{y}{y^2+x^2}}(s) = e^{-y|s|}$$

(elegimos $a = y > 0$ y se trabaja como constante para este cálculo). Notamos que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{e^{-|s|y}}{|s|}\right) = e^{-|s|y}.$$

Esto sugiere que conviene considerar

$$\int \frac{y}{y^2+x^2}\,dy = \frac{1}{2}\log(y^2+x^2),$$

idea de integrar y encontrar antitransformada de $\frac{e^{-|s|y}}{|s|}$: 0,4

y vemos que

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\widehat{\log(y^2+x^2)}(s) = -\frac{e^{-|s|y}}{|s|} + C$$

para alguna constante C. Considerando $s \to \infty$ se puede argumentar que $C = 0$.

Encontramos entonces

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\log(y^2+x^2) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log(y^2+(x-t)^2)f(t)\,dt. \end{aligned}$$

convolución y resultado: 0,3

Pregunta 3.

Considere el problema

(*) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + a(x)u, & x \in (0, L),\ t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

con la condición inicial

(**) $$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L],$$

donde $u_0(x)$ y $a(x)$ son conocidas y C^2. Se quiere probar que el problema (*), (**) tiene a lo más una solución $u \in C^2$.

(a) (1 pto.) Prueba que si u_1, u_2 son soluciones de (*) y (**), entonces $u = u_1 - u_2$ satisface (*) y condición inicial:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L].$$

(b) (2 ptos.) Pruebe que

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)^2\,dx = 2\int_0^L a(x)u(x,t)^2 - u_x(x,t)^2\,dx$$

(c) (1 pto.) Concluya que si $a(x) \leq 0$, entonces $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ para todo $x \in (0, L)$, y todo $t > 0$.

(d) (2 ptos.) Pruebe que $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ para todo $x \in (0, L)$, y todo $t > 0$, sin suponer $a(x) \leq 0$, utilizando el cambio de variables $u(x,t) = e^{\lambda t}v(x,t)$ donde λ es una constante apropiada (encuentre la ecuación satisfecha por v).

Solución.

(a) La función u satisface

$$\begin{aligned} u_t = (u_1 - u_2)_t &= (u_1)_t - (u_2)_t \\ &= (u_1)_{xx} + a(x)u_1 - (u_2)_{xx} + a(x)u_2 \\ &= u_{xx} + a(x)u \end{aligned}$$

basta mencionar que la ecuación es lineal verificar ecuación: 0,4

Lo mismo para las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= (u_1 - u_2)_x(0,t) \\ &= (u_1)_x(0,t) - (u_2)_x(0,t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_x(L,t) &= (u_1 - u_2)_x(L,t) \\ &= (u_1)_x(L,t) - (u_2)_x(L,t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además

$$u(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = u_0(x) - u_0(x) = 0.$$

verificar condiciones de borde: 0,3

verificar condición incial: 0,3

(b) Calculamos

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)^2\,dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)^2)\,dx$$
$$= 2\int_0^L u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,dx$$

derivar: 0,5

y usamos la ecuación:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)^2\,dx = 2\int_0^L u(x,t)(u_{xx}(x,t)+a(x)u(x,t))\,dx.$$

usar ecuación: 0,5

El primer término lo integramos por partes

$$\int_0^L u(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx = u(x,t)u_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_x(x,t)^2\,dx$$
$$-\int_0^L u_x(x,t)^2\,dx$$

integrar por partes: 0,5

por la condición de borde. Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)^2\,dx = 2\int_0^L a(x)u(x,t)^2 - u_x(x,t)^2\,dx.$$

concluir: 0,5

(c) Suponemos que $a(x)\le 0$. Entonces de la parte (b), si llamamos

$$f(t) = \int_0^L u(x,t)^2\,dx$$

tenemos

$$\frac{d}{dt}f(t)\le 0.$$

Pero

$$f(0) = \int_0^L u(x,0)^2\,dx = 0$$

por la condición inicial para u. Como $f(t)\ge 0$, deducimos que $f(t)=0$ para cualquier $t>0$. Pero entonces

argumento $f(t)=0$: 0,5

$$\int_0^L u(x,t)^2\,dx = 0 \quad \forall t>0.$$

Como la función $u(x,t)^2\ge 0$ es continua, concluimos que

$$u(x,t)=0 \quad x\in(0,L),\ t>0.$$

concluir $u=0$: 0,5

Por lo tanto

$$u_1(x,t)=u_2(x,t) \quad x\in(0,L),\ t>0.$$

(d) En esta parte no hay hipótesis sobre el signo de $a(x)$. Como la indicación lo sugiere, consideramos una nueva función $v(x,t)$ tal que

$$u(x,t)=e^{\lambda t}v(x,t)$$

donde λ es una constante que vamos a fijar más adelantes. Veamos que v satisface una ecuación, y para esto calculamos

$$u_t = e^{\lambda t}\lambda v + e^{\lambda t}v_t$$

relación de u_t y v_t: 0,5

y

$$u_{xx} = e^{\lambda t} v_{xx}.$$

Entonce de la ecuación para u, encontramos

relación de u_{xx} y v_{xx}: 0,5

$$e^{\lambda t}(\lambda v + v_t) = e^{\lambda t} v_{xx} + e^{\lambda t} a(x) v.$$

Dividiendo por $e^{\lambda t}$ encontramos

$$v_t = v_{xx} + (a(x) - \lambda) v.$$

Es decir, v cumple una ecación similar a la de u, pero donde $a(x)$ fue reemplazad por $a(x) - \lambda$.

ecuación para v: 0,5

Verifiquemos las condiciones de borde:

$$v_x(0,t) = e^{\lambda t} u_x(0,t) = 0$$
$$v_x(L,t) = e^{\lambda t} u_x(L,t) = 0.$$

La condición inicial para v es

$$v(x,0) = u(x,0) = 0.$$

Ahora elegimos $\lambda = \max_{x \in [0,L]} a(x)$. Entonces $a(X) - \lambda \leq 0$. Aplicando la parte anterior a la función v, concluimos que

buena elección de λ e idea de usar parte anterior: 0,5

$$v(x,t) = 0 \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

Por lo tanto

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$