Control 3 MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

11 de noviembre de 2004

Profesores: J. Dávila

Problema 1. a) (3 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1, periódica de período 2π y considere su serie de Fourier compleja

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Muestre que f es par si y solo si $c_n \in \mathbb{R}$ $\forall n$, y que f es impar si y solo si $c_0 = 0$ y $c_n = id_n$ con $d_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \neq 0$.

b) Encuentre las series de Fourier de las funciones siguientes en el intervalo que se indica:

$$i)\ \operatorname{sen}^3(x) \quad -\pi \leq x \leq \pi, (1pto.) \quad ii)\ |\operatorname{sen}(x)| \quad -\pi \leq x \leq \pi(1pto.).$$

Utilice la última para calcular $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ (1 pto.).

Indicación: para $i)$ utilice la fórmula $\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx) = (\cos(x) + i\sin(x))^k$.

Problema 2. Considere la ecuación de Laplace con condiciones de borde tipo Neumann en el cuadrado $(0,\pi) \times (0,\pi)$:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0 && 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 && 0 < y < \pi \\
&\frac{\partial u}{\partial y}(x,\pi) = 0 && 0 < x < \pi \\
&\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x) && 0 < x < \pi
\end{aligned} \tag{*}$$

a) (4 ptos.) Suponiendo que u es solución del problema anterior, encuéntrela por el método de separación de variables. ¿Se puede determinar u de manera única?

b) (1 pto.) Muestre que si hay solución de (*) entonces $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$.

c) (1 pto.) Encuentre una solución explícita en el caso $f(x) = \cos^2(x) - \frac{1}{2}$.

Problema 3. a) (1 pto.) Utilizando el hecho que la transformada de $\frac{a}{a^2+x^2}$ ($a > 0$ constante) es $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|s|}$ muestre que

$$\widehat{\frac{a^3 - ax^2}{(x^2+a^2)^2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a|s|e^{-a|s|}.$$

Indicación: derive con respecto a $a > 0$ bajo la integral en la definición de $\widehat{\frac{a}{a^2+x^2}}$.

Para una función $u(x,y)$ de clase C^4 se define $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

b) (1 pto.) Muestre que para u de clase C^4 se tiene $\Delta^2 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$.

c) (5 ptos.) Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u = 0 &\quad -\infty < x < \infty, y > 0 \\
u(x,0) = f(x) &\quad -\infty < x < \infty, \qquad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \quad -\infty < x < \infty \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = g(x) &\quad -\infty < x < \infty
\end{aligned}$$

suponiendo que f y g son integrables y que para cada $y \geq 0$ $u(\cdot,y)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,y)$ son integrables. Exprese la solución en la forma

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x-w,y)f(w)\,dw + \int_{-\infty}^{\infty} B(x-w,y)g(w)\,dw$$

encontrando las funciones A y B explícitamente.

TIEMPO: 3 HORAS.

Pregunta 1 (1)

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 periódica de período 2π

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$ serie de Fourier compleja de f

Entonces:

f es par $\iff c_n \in \mathbb{R}\ \forall n$

f es impar $\iff c_0 = 0,\ c_n = i d_n,\ d_n \in \mathbb{R}\ \forall n \neq 0$.

b) Encontrar la serie de Fourier de

i) $\operatorname{sen}^3 x \qquad -\pi \leq x \leq \pi$

ii) $|\operatorname{sen} x| \qquad -\pi \leq x \leq \pi$.

Sol a) $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Supongamos f par. Entonces

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) e^{-inx} dx \quad , \ x = -y$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(-y) e^{iny} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x) \left(e^{-inx} + e^{inx}\right) dx.$$

Pero $e^{inx} + e^{-inx} = \cos(nx) + i\,\mathrm{sen}(nx) + \cos(-nx) + i\,\mathrm{sen}(-nx)$

$= 2\cos(nx)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot 2\cos(nx)\,dx \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que f es impar. Entonces

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, e^{inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left(e^{-inx} - e^{inx}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left(-2i\,\mathrm{sen}(nx)\right)dx$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & n=0 \\ i d_n,\ d_n \in \mathbb{R}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Supongamos $c_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{R}$. Como f es C^1 y 2π-periódica

$S_f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$f(-x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}\,dx = \overline{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right)} \quad \text{ya que } c_n \in \mathbb{R}$$

$$= \overline{f(x)} = f(x) \quad \text{, porque } f(x) \in \mathbb{R}$$

Supongamos $c_n = i d_n$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, $c_0 = 0$.

$$f(-x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx} = \overline{\left(-\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right)}$$

$$= \overline{(-f(x))}$$

$$= -f(x)$$

Notar que para $n=0$ $\quad c_0 e^{i \cdot 0 \cdot x} = 0 \Rightarrow c_n e^{-inx} = \overline{-c_n e^{inx}}$

Para $n \neq 0$ $\quad c_n = i d_n$, $d_n \in \mathbb{R}$ ya que $c_n e^{-inx} = i d_n e^{-inx}$

$$= \overline{\left(-i d_n e^{inx}\right)} = i d_n e^{-inx}$$

<u>Observación</u> El ejercicio se puede plantear para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

C^1 y periódica, con las definiciones

f es par $\Leftrightarrow$ $f(-x) = \overline{f(x)}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

f es impar $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -\overline{f(x)}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) i) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ es impar, luego su serie de Fourier

tiene la forma

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \qquad -\pi \leq x \leq x.$$

Una forma de resolver: fórmula para $\operatorname{sen}^3 x$:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = e^{3ix} = \cos(3x) + i \operatorname{sen}(3x).$$

Desarrollando

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos^3 x + 3 i \cos^2 x \operatorname{sen} x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x$$

Luego $\operatorname{sen} 3x = 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

$$= 3 (1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$$

$$= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{4} (3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x) = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3x$$

Esto es justamente la serie de Fourier de $\operatorname{sen}^3 x$ en $(-\pi, \pi)$.

ii) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ es par, por lo que su serie de Fourier tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad , \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos(nx) dx \quad , \text{ porque } \operatorname{sen} x \geq 0 \text{ para } x \in [0, \pi]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\cos x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} \cos x \operatorname{sen}(nx) dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[(-1)^n + 1 - n \left(\underbrace{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^{\pi}}_{=0} - n \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos(nx) dx \right) \right]$$

$$= 2 \frac{(-1)^n + 1}{\pi} + \frac{2n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos(nx) dx$$

$$= 2 \frac{(-1)^n + 1}{\pi} + n^2 a_n$$

$$a_n (1 - n^2) = 2 \frac{(-1)^n + 1}{\pi} \qquad a_n = 2 \frac{1 + (-1)^n}{(1 - n^2)\pi} \quad , \quad n \geq 2, n = 0$$

Evaluando en $x = \pi/2$

$$\operatorname{sen} \pi/2 = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos\left(2k \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(k\pi)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

MA26B Matemáticas Aplicadas, Semestre 2004-2
Facultad de Ciencias Fisicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Auxiliares: R. Aliaga, G. Dávila, M. Duarte, M. Rojo

Profesores: I. Guerra. J.Davila, P. Guiraud

1. Considere la ecuación de Laplace con condiciones de borde tipo Neumann en el cuadrado $(0, \pi) \times (0, \pi)$:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 && 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 && 0 < y < \pi \\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = 0 && 0 < x < \pi \\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x) && 0 < x < \pi \end{aligned} \tag{*}$$

a)(4 ptos) Suponiendo que u es solución del problema anterior, encuentrela por el método de separación de variables. ¿Se puede determinar u de manera única?

b) (1 pto) Muestre que si hay solución de (*) entonces $\int_0^\pi f(x)\, dx = 0$.

c) (1 pto) Encuentre una solución explicita para $f(x) = \cos^2(x) - \frac{1}{2}$.

Solución. Por separación de variables colocamos $U(x, y) = X(x)Y(y)$ y tenemos que

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

con λ real. Así obtenemos el sistema:

$$X'' = \lambda X \quad \text{y} \quad Y'' = -\lambda Y. \qquad (\mathbf{0{,}5ptos}.)$$

Caso $\lambda = 0$:

$$X(x) = ax + b, \quad Y(y) = cy + d$$

Entonces

$$U_x(x, y) = aY(y) \quad \text{y} \quad U_y(x, y) = cX(x)$$

si $U_x(0, y) = 0$ implica $a = 0$, $U_y(x, \pi) = 0$ implica $c = 0$ y $U_x(\pi, y) = 0$ se satisface en forma automatica. Esto implica que

$$U(x, y) = bd = constante.$$

Caso $\lambda \neq 0$:

$$X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad Y(y) = ce^{\sqrt{-\lambda}y} + de^{-\sqrt{-\lambda}y}$$

entonces

$$U_x(x, y) = \sqrt{\lambda}(ae^{\sqrt{\lambda}x} - be^{-\sqrt{\lambda}x})Y(y) \quad \text{y} \quad U_y(x, y) = \sqrt{-\lambda}(ce^{\sqrt{-\lambda}y} - de^{-\sqrt{-\lambda}y})X(x)$$

si $U_x(0, y) = 0$ implica $a = b$ por otro lado $U_y(x, \pi) = 0$ implica $d = ce^{2\sqrt{-\lambda}\pi}$.

La condición $U_x(\pi, y) = 0$ implica

$$e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 1.$$

Si $\lambda > 0$ entonces no hay solucion. Pero para $\lambda < 0$ tenemos

$$e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = e^{2\pi k i}$$

con $k = 1, 2, ..$ asi $\lambda = -k^2$ para $k = 1, 2...$

Analisis total de casos de lambda **(1.50 pto)**.

Entonces uniendo los casos y reemplazando el valor de lambda, la soluciones fundamentales se escriben como

$$U_k(x, y) = X(x)Y(y) = \cos(kx)(e^{ky} + e^{k(2\pi - y)}) \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Entonces por principio de superposicion

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx)(e^{ky} + e^{k(2\pi - y)}) \qquad (\mathbf{0{,}5ptos}).$$

Ahora vamos a imponer $u_y(x, 0) = f(x)$.

$$u_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k k \cos(kx)(e^{ky} - e^{k(2\pi - y)})$$

donde eliminamos $k = 0$. Evalunado en $y = 0$

$$u_y(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k k \cos(kx)(1 - e^{k(2\pi)}).$$

Pero para f par en $[-\pi, \pi]$ la serie es de la forma

$$S_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

Entonces igualando las series S_f y f tenemos $a_0 = 0$ y para $k = 1, 2....$

$$a_k = \alpha_k k(1 - e^{k(2\pi)}) \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$$

lo que implica que

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k(1 - e^{k(2\pi)})} cos(kx)(e^{ky} + e^{k(2\pi - y)}) + 2\alpha_0 \qquad (\mathbf{1{,}25ptos}).$$

La solución no queda determinda en forma unica, α_0 puede ser elegido en forma arbitraria. **(0.25 pto)**

Parte b) **(1 pto)** Dos formas. Como $a_0 = 0$ entonces se tiene la propiedad.

Tambien integrando término a término la serie $S_f(x)$.

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx = 0$$

usando $\int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx = \text{sen}(kx)/k|_0^{\pi} = 0$ para $k = 1, 2, 3, ...$

c) Para $f(x) = \cos^2(x) - \frac{1}{2}$ la serie de fourier se escribe como

$$f(x) = S_f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) \qquad (\mathbf{0{,}5ptos})$$

usando que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Entonces $a_2 = 1/2$ y $a_k = 0$ para $k \neq 2$. La solucion queda entonces

$$u(x, y) = \frac{1}{4(1 - e^{4\pi})} \cos(2x)(e^{2y} + e^{2(2\pi - y)}) + 2\alpha_0. \qquad (\mathbf{0{,}5ptos})$$

Pregunta 3 Control 3

i) Sabemos que

$$(*) \quad \widehat{\frac{1}{a^2+x^2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a}\,e^{-a|s|} \qquad a>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\widehat{\frac{a}{x^2+a^2}}(s) = e^{-|s|a}$$

(*) es lo mismo que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad e^{-a|s|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+x^2}\; e^{-isx}\,dx$$

Derivando c/r a a

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;|s|\;e^{-a|s|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2+x^2-a\,2a}{(a^2+x^2)^2}\; e^{-isx}\,dx$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;|s|\;e^{-a|s|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-a^2}{(a^2+x^2)^2}\; e^{-isx}\,dx$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;a|s|\,e^{-|s|a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^3-ax^2}{(a^2+x^2)^2}\,e^{-isx}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\widehat{\frac{a^3-a\,x^2}{(a^2+x^2)^2}}(s) = a|s|\;e^{-|s|a}$$

b) $\Delta(\Delta u) = (u_{xx}+u_{yy})_{xx} + (u_{xx}+u_{yy})_{yy}$

$= u_{xxxx} + u_{yyxx} + u_{xxyy} + u_{yyyy}$

$= u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}.$

c) $\hat{u}(s,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\, e^{-ixs}\, dx$

$(is)^4\hat{u} + 2(is)^2\hat{u}_{yy} + \hat{u}_{yyyy} = 0$

Esta es una EDO en y (para s fijo) con polinomio característico (en m)

$s^4 - 2s^2m^2 + m^4 = 0$ es $(m^2-s^2)=0$

las raíces son $m = \pm s$ con multiplicidad 2

$\Rightarrow \hat{u}(s,y) = c_1(s)\,e^{sy} + c_2(s)\,e^{-sy} + c_3(s)\,y\,e^{sy} + c_4(s)\,y\,e^{-sy}.$

Raíces repetidos

Pero $\hat{u}(s,y) \to 0$ cuando $y \to \infty$.

Cuando $s>0$ $e^{sy}, ye^{sy} \to 0$, luego

$c_1(s) = 0$, $c_3(s) = 0$ para $s>0$.

Cuando $s<0$, e^{-sy}, $y e^{-sy} \to \infty$, $y \to \infty$

$\Rightarrow C_2(s)=0$, $C_4(s)=0$ para $s<0$.

Definiendo $a(s) = \begin{cases} C_1(s) & s<0 \\ C_2(s) & s>0 \end{cases}$

$b(s) = \begin{cases} C_3(s) & s<0 \\ C_4(s) & s>0 \end{cases}$

tenemos
$$\hat{u}(s,y) = a(s)\, e^{-|s|y} + b(s)\, y\, e^{-|s|y}$$

Utilicemos las condiciones de borde

$$\hat{u}(s,0) = a(s) = \hat{f}(s)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(s,y) = -|s|\, a(s)\, e^{-|s|y} + b(s)\, e^{-|s|y} - b(s)\, y\, |s|\, e^{-|s|y}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(s,0) = -|s|\, a(s) + b(s) = \hat{g}(s).$$

$$-|s|\,\hat{f}(s) + b(s) = \hat{g}(s)$$

$$b(s) = \hat{g}(s) + |s|\,\hat{f}(s)$$

Tenemos
$$\hat{u}(s,y) = a(s)\, e^{-|s|y} + b(s)\, y\, e^{-|s|y}$$
$$= \hat{f}(s)\, e^{-|s|y} + (\hat{g}(s) + |s|\hat{f}(s))\, y\, e^{-|s|y}$$

$$\hat{u}(s,y) = \hat{f}(s)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\widehat{\frac{y}{x^2+y^2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\widehat{\frac{y^3-yx^2}{(y^2+x^2)^2}} \right.$$

$$\left. + \hat{g}(s)\, y\, \widehat{\frac{y}{x^2+y^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f * \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{x^2+y^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \right.$$

$$\left. + g * \frac{y^2}{x^2+y^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\left(\frac{y}{(x-w)^2+y^2} + \frac{y^3-y(x-w)}{((x-w)^2+y^2)^2} \right) dw$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)\frac{y^2}{(x-w)^2+y^2}\, dw.$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y^3}{((x-w)^2+y^2)^2} f(w)\,dw + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(x-w)^2+y^2} g(w)\,dw$$