Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.

Pauta Control 3 MA2002-01 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Jaime González E.
Auxiliar: Carlos Duarte C.
Semestre Verano 2009
Fecha: Miércoles 20 de Enero de 2010

P1.- Calcule las siguientes integrales:

$$a) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \operatorname{sen}^2(\theta)} \quad \alpha > 0$$

$$b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(x^2+\beta^2)^2} dx \quad \alpha, \beta > 0$$

Para la parte (b) debe justificar que se cumplen las condiciones que permiten la aplicación de la fórmula basada en los residuos, indicando el contorno γ y la integral (compleja) sobre cada tramo de γ.

Solución:
a) Ya que es una integral de la forma:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) d\theta$$

Se realiza el cambio, considerando como curva γ la circunferencia unitaria:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Lo que implica:

$$\oint_\gamma \frac{-i}{z(\alpha - \frac{1}{4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^2)} dz = 4i \oint_\gamma \frac{z}{z^4 - (2+4\alpha)z^2 + 1} dz$$

y las singularidades de la función son las raíces de $z^4 - (2+4\alpha)z^2 + 1 = 0 \quad (*)$. Si $w = z^2$, la ecuación $w^2 - (2+4\alpha)w + 1 = 0$ tiene raíces $w_1 = 1 + 2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2+\alpha}$ y $w_2 = 1 + 2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2+\alpha}$ y por lo tanto las raíces de $(*)$ son $z_1 = \sqrt{w_1}$, $z_2 = -\sqrt{w_1}$, $z_3 = \sqrt{w_2}$ y $z_4 = -\sqrt{w_2}$. **0.8**

Se deben determinar las raíces que quedan encerradas por γ, es decir, los $|z_k| < 1$. Como $\alpha > 0$ implica que $w_2 > 1$, y por lo tanto $|z_3| > 1$ y $|z_4| > 1$. Por otra parte, si $\alpha > 0$ nos lleva a $w_1 < 1$ lo que significa que $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$. Luego γ encierra a z_1 y z_2. **0.7**

Por el teorema de los residuos:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma \frac{z}{z^4-(2+4\alpha)z^2+1}dz = 2\pi i(Res(f,z_1)+(Res(f,z_2)))$$

z_1 y z_2 son polos de orden 1, luego:

$$Res(f,z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{z}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

Pero como $z_1 = -z_2$ y $z_3 = -z_4$. Así $(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4) = 2z_1(z_1^2-z_3^2) = 2z_1(w_1-w_2)$ por lo tanto:

$$Res(f,z_1) = \frac{1}{2(w_1-w_2)} = -\frac{1}{8\sqrt{\alpha^2+\alpha}}$$

Análogamente:

$$Res(f,z_2) = \frac{1}{2(w_1-w_2)} = -\frac{1}{8\sqrt{\alpha^2+\alpha}}$$

Finalmente:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha+\operatorname{sen}^2(\theta)} = 4i\cdot 2\pi i\cdot -\frac{1}{4\sqrt{\alpha^2+\alpha}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2+\alpha}} \quad \mathbf{1.5}$$

b) Esta integral es del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(\alpha x)dx$, donde $gr(q)\geq gr(p)+1$, $q(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ y por lo tanto se puede considerar la integral compleja:

$$\oint_\gamma \frac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}dz$$

Donde $\gamma=\gamma_1\cup\gamma 2$, γ_1: semicírculo de radio R y γ_2: segmento lineal de $-R$ a R en el eje $Re(z)$. **0.5**

Como

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+\beta^2)^2}$$

y como $z=i\beta$ son las raíces de $z^2+\beta^2$ y $e^{i\alpha\beta}\neq 0$ resulta que $z=i\beta$ son polos de orden 2 pero solamente $z=i\beta$ está encerrado por γ. Además haciendo $z=Re^{i\theta}$ y acotando:

$$\int_{\gamma_1}|f(z)dz| \leq \frac{\pi}{R^3}\to 0 \quad R\to\infty$$

Luego por teorema de los residuos:

$$\int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+\beta^2)^2} = 2\pi i Res(f,i\beta) \quad \mathbf{1.0}$$

Cálculo del Residuo, recordar que $i\beta$ es polo de orden 2:

$$Res(f,i\beta) = \lim_{z\to i\beta} \frac{d}{dz}[(z-i\beta)^2 f(z)] = \lim_{z\to i\beta} \frac{i\alpha e^{i\alpha z}(z+i\beta)^2 - 2e^{i\alpha z}(z+i\beta)}{(z+i\beta)^4}$$

Luego:

$$Res(f,i\beta) = \frac{-2\alpha\beta e^{-\alpha\beta} - 2e^{-\alpha\beta}}{-8i\beta^3} = \frac{e^{-\alpha\beta}(1+\alpha\beta)}{4i\beta^3}$$

Multiplicando por $2\pi i$ y tomando la parte real (la parte imaginaria vale cero) se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(x^2+\beta^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-\alpha\beta}(1+\alpha\beta)}{2\beta^3} \quad \mathbf{1.5}$$

P2.- Sea

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)}$$

(a) Determine las regiones de convergencia de la serie de Laurent en torno a:
(1) $z_0 = i$ (2) $z_0 = 1+i$.
(b) Obtenga la serie de Laurent de f en torno a $z_0 = 1+i$, y que converge en $z_1 = \frac{i}{4}$.

Solución:
(a)(1) La serie de Laurent en torno a $z_0 = 1$ converge en un anillo $A(z_0, r_1, r_2) = \{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ además cada anillo no puede contener singularidades. Vemos que la función posee polos en $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$. Vemos las distancias de los polos al centro (distintas de 0): $|z_0 - z_1| = |i - 0| = 1$ y $|z_0 - z_3| = 2$. Lo que implica anillos:

$$A_1 = A(1,0,1) \quad A_2 = A(1,1,2) \quad A_3 = A(1,2,\infty)$$

(a)(2) Análogamente la serie de Laurent en torno a $z_0 = 1+i$. Vemos que la función posee polos en $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$. Vemos las distancias de los polos al centro (distintas de 0): $|z_0 - z_1| = |1+i-0| = \sqrt{2}$, $|z_0 - z_2| = |1+i-i| = 1$ y $|z_0 - z_3| = |1+i+i| = \sqrt{5}$. Lo que implica anillos:

$$A_1 = A(1+i,0,1) \quad A_2 = A(1+i,1,\sqrt{2}) \quad A_3 = A(1+i,\sqrt{2},\sqrt{5}) \quad A_4 = A(1,\sqrt{5},\infty)$$

(b) Antes de ver los distintos casos, expresemos $f(z)$ en fracciones parciales:

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+i} + \frac{D}{z+i}$$

Donde

$$A = 0 \quad B = 1 \quad C = -\frac{i}{2} \quad D = \frac{i}{2}$$

.
Vemos que $|z_0 - z_1| = |1 + i - \frac{i}{4}| = \frac{5}{4} \in A_2$ Una serie convergente en A_4 es de la forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - i - 1)^n$ con $|z - 1 - i| < 1$ donde

$$a_n = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$\gamma \subset A$ es una circunferencia centrada en z_0 con radio $r_1 < \rho < r_2$.
Recordar que $z_0 = 1 + i$. La serie para $\dfrac{1}{z}$ es:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n \qquad |z - z_0| < |z_0| = \sqrt{2}$$

Derivando (en el resultado va el menos):

$$\frac{1}{z^2} = S_1 = \frac{1}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n \qquad |z - z_0| < |z_0| = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{z + i} = \frac{1}{z_0 + i + z - z_0} = S_2 = \frac{1}{z_0 + i} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0 + i} \right)^n \qquad |z - z_0| < |z_0 + i| = \sqrt{5}$$

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{(z - z_0)(1 + \frac{i}{z - z_0})} = S_3 = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0 - i} \right)^{-n} \qquad |z - z_0| > |i| = 1$$

Así la serie de Laurent se escribe como:

$$f(z) = B \cdot S_1 + C \cdot S_2 + D \cdot S_3 \quad 1 < |z - z_0| < \sqrt{2}$$

P3.- Considere el siguiente problema:

$$(P) : \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 9 \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0 \quad 0 < x < 9$$
$$u(0, t) = 1 \quad u(9, t) = 10 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x \quad 0 < x < 9$$

(a) Compruebe que el MSV no resuelve (P).
(b) Sea $u(x, t) = U(x, t) + f(x)$ Determine f de modo que el problema resultante (P_U) se puede resolver usando MSV.
(c) Resuelva (P_U) y obtenga la solución de (P) mediante la solución de (P_U).

Solución:
(a) Supongamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, se determina en que parte (P) falla:

$$XT'' = 4X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T} = -\lambda \quad \checkmark$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \quad T(t) \neq 0 \quad \checkmark$$

$$u(9,t) = 0 \Rightarrow X(9)T(t) = 10 \Rightarrow X(9) \neq 0 \quad T(t) = \frac{10}{X(9)} = cte$$

Pero como $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x$ no se puede seguir con el método. **1.0**

(b) Sea $u(x,t) = U(x,t) + f(x)$ tenemos:

$$(P') : \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4f''(x) \quad 0 < x < 9 \quad t > 0$$
$$u(x,0) = U(x,0) + f(x) = 0 \quad 0 < x < 9$$
$$u(0,t) = U(0,t) + f(0) = 1 \quad u(9,t) = U(9,t) + f(9) = 10$$
$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = x \quad 0 < x < 9 \quad \mathbf{0.5}$$

Se impone $f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$ y para anular las condiciones de borde se coloca $f(0) = 1$ y $f(9) = 10$, lo que nos conduce a $a = b = 1$ luego $f(x) = x + 1$. **0.8**

Nuestro nuevo problema (P_U) es:

$$(P_U) : \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 9 \quad t > 0$$
$$U(x,0) = -f(x) = -x - 1 \quad 0 < x < 9$$
$$U(0,t) = 0 \quad U(9,t) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = x \quad 0 < x < 9 \quad \mathbf{0.2}$$

(c) Solución de (P_U) usando separación de variables, suponemos $U(x,t) = X(x)T(t)$, lo que implica:

$$XT'' = 4X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T} = -\lambda$$

Luego las EDO que resultan:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad T'' + 4\lambda T = 0 \quad \mathbf{0.3}$$

Condiciones de (P_U) que se pueden traspasar:

$U(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$. Se puede traspasar ✓

$U(9,t) = X(9) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(9) = 0$. Se puede traspasar ✓
$U(x,0) = -x-1 \Rightarrow X(x) \cdot T(0) = -x-1$. No se puede traspasar $\times$
$\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = X(x) \cdot T'(0) = x$. No se puede traspasar $\times$
Los problemas resultantes son: (P_X) : $X'' + \lambda X = 0$ $X(0) = X(9) = 0$. (P_T) : $T'' + 4\lambda T = 0$. **0.5**

Solución de (P_X) y (P_T):
1) Caso $\lambda = 0$:
$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b$ y como $X(0) = X(9) = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow X(x) = 0$ ya que se buscan soluciones no nulas, la solución se descarta. **0.3**

2) Caso $\lambda < 0$ ($\lambda = -k^2$, con $k > 0$):
$X'' - k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$ y como $X(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a(e^{kx} - e^{-kx})$ y $X(9) = 0 \Rightarrow a(e^{9k} + e^{-9k}) = 0 \Rightarrow a = b = 0$ y nuevamente se obtiene $X(x) = 0$ ya que se buscan soluciones no nulas, la solución se descarta. **0.5**

3) Caso $\lambda > 0$ ($\lambda = k^2$, con $k > 0$):
$X'' + k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$ y como $X(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X(x) = b\,\mathrm{sen}(kx)$ y $X(9) = 0 \Rightarrow b\,\mathrm{sen}(9x) = 0 \Rightarrow k = \dfrac{n\pi}{9}$ luego

$$X_n(x) = b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right) \quad n = 1, 2 \ldots$$

Por otra parte $T'' + 4\lambda T = 0$ implica:

$$T_n(t) = c_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{9}\right) + d_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{9}\right) \quad n = 1, 2 \ldots$$

$$U_n(x,t) = \left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{9}\right) + B_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{9}\right)\right] \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right) \quad n = 1, 2 \ldots$$

Con $A_n = b_n c_n$ y $B_n = b_n d_n$ **0.7**

Principio de superposición:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

es solución de (P_U)-(condiciones no traspasadas)
Primera condición no traspasada:

$$U(x,0) = -x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right)$$

donde A_n es el coeficiente de la serie de Fourier de senos (extensión impar):

$$A_n = \frac{2}{9}\int_0^9 (-x-1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right)dx$$

Segunda condición no traspasada:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left(\frac{2n\pi}{9}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right)$$

donde B_n es el coeficiente de la serie de Fourier de senos (extensión impar):

$$B_n\left(\frac{2n\pi}{9}\right) = \frac{2}{9}\int_0^9 (x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right)dx$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^9 x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right)dx \quad \mathbf{0.6}$$

Cálculo de A_n y B_n:

$$A_n = -\frac{2}{9}\int_0^9 (x+1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right)dx = \frac{2(10(-1)^n-1)}{n\pi}$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^9 x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right)dx = \frac{-81(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Finalmente:

$$u(x,y) = U(x,y) + f(x) = U(x,y) + x + 1 \quad \mathbf{0.6}$$