Propuesta Control 3 - MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2014-2

Problema 1:

(a) Sea f una función 2π-periodica e integrable, es decir, para todo x se tiene que

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

(i) Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{2\pi+a}^{2\pi+b} f(x)\,dx$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

(1 pto.)

(ii) Sea $\hat{f}(n)$ el n-ésimo coefficiente de Fourier de f, dado por:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Demuestre que la serie de Fourier de f se puede escribir como

$$f(\theta) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}[\hat{f}(n)+\hat{f}(-n)]\cos(n\theta) + i[\hat{f}(n)-\hat{f}(-n)]\sin(n\theta).$$

(1 pto.)

(iii) Deduzca que si f es par entonces $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ y le serie de Fourier es la serie de cosenos ¿Qué pasa cuando f es impar? Justifique su respuesta

(1 pto.)

(b) Sea f definida en $[-\pi, \pi]$ definida como $f(x) = |x|$. Calcule los coeficientes de Fourier de f

(3 ptos.)

Solución

(a) Sea f una función 2π-periodica e integrable, es decir, para todo x se tiene que

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

(i) Veamos la igualdad de las integrales, notemos que si consideramos la variable $y = x - 2\pi$, entonces se tiene que

$$\int_{2\pi+a}^{2\pi+b} f(x)\,dx = \int_a^b f(y+2\pi)\,dy$$

y dado que la función es 2π-periódica, entonces se tiene que

$$\int_{2\pi+a}^{2\pi+b} f(x)\,dx = \int_a^b f(y+2\pi)\,dy = \int_a^b f(y)\,dy,$$

lo que completa la demostración.

(0,5 ptos.)

Veamos ahora las otras identidades.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

En primer lugar, si consideramos $y = x + a$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,dy,$$

lo que prueba una de las igualdades, además tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(x)\,dx + \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x)\,dx.$$

y por otra parte se tiene que

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

y de la igualdad demostrada en *(i)* se tiene que

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(x)\,dx = \int_{-\pi+2\pi}^{-\pi+a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{\pi+a} f(x)\,dx,$$

así de las identidades anteriores concluimos la demostración.

(0,5 ptos.)

(ii) Recordemos que la Serie de Fourier de f la podemos escribir en la forma

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin(n\theta)\right),$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$$

(0,3 ptos.)

Recordemos además que

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \qquad \text{y} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},$$

es decir,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta,$$

por lo tanto se tiene que

(0,3 ptos.)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \hat{f}(0),$$

además

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{in\theta}\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta = \hat{f}(n)+\hat{f}(-n), \end{aligned} \quad (1)$$

análogamente

$$
\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{in\theta}\,d\theta - \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{i}\left(\hat{f}(n)-\hat{f}(-n)\right) = i\left(\hat{f}(-n)-\hat{f}(n)\right), \qquad (2)
\end{aligned}
$$

luego reemplazando en la serie se completa la demostración.

(0,4 ptos.)

(iii) Deduzca que si f es par entonces $\hat{f}(n)=\hat{f}(-n)$ y le serie de Fourier es la serie de cosenos ¿Qué pasa cuando f es impar? Justifique su respuesta

Notemos que si la función en par, entonces se tiene que es una serie de cosenos y por tanto

$$b_n = 0,\ \forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow \hat{f}(-n)-\hat{f}(n)=0,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

(0,5 ptos.)

en forma análoga si f es impar, la serie es una serie de senos, es decir,

$$a_n = 0,\ \forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow \hat{f}(-n)+\hat{f}(n)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

(0,5 ptos.)

(b) Sea f definida en $[-\pi,\pi]$ definida como $f(x)=|x|$. Luego como f es par, se tiene que la serie es de cosenos, es decir,

$$b_n = 0, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

(1,0 ptos.)

Ademś se tiene que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

(0,5 ptos.)

Además

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dxdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x\sin(nx)}{n}|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

(0,5 ptos.)

Luego

$$f(x) = \frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x).$$

(1.0 ptos.)

Problema 2:

(a) Sea $\delta \in (0,\pi)$ fijo. En el intervalo $[-\pi,\pi]$ considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \delta, \\ 1 - |x|/\delta, & |x| < \delta. \end{cases}$$

(i) Esboce el grafo de la función f.

(0.5 pto.)

(ii) Calcule la serie de Fourier de f y demuestra que

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\delta}{n^2\pi\delta}\cos nx.$$

(1.5 pto.)

(iii) Ahora considere f como una función definida en $\mathbb{R}$. Calcule la transformada de Fourier de f.

(1.5 ptos.)

(b) Sea f una función integrable y $\hat{f}$ su transformada de Fourier.

(i) Suponiendo que f tiene valores reales demuestre que la conjugada de la transformada de Fourier satisface $\overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi)$.

(0.5 ptos.)

(ii) Suponiendo que f es par (impar) demuestre que $\hat{f}$ es par/impar.

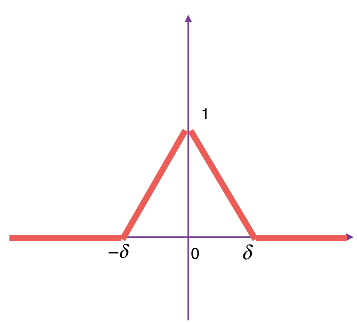
(1 pto.)

(iii) Demuestre que

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(1 pto.)

Solución:



(a) (i)

Figura 1: gráfica de la función f

(0.5 pto.)

(ii) Veamos la serie de Fourier de la función, en primer lugar podemos notar que la función es par, luego se tiene que la serie de Fourier es una serie de cosenos y por lo tanto $b_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

(0.5 pto.)

Calculemos los coeficientes a_n, es decir,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(x-\frac{x^2}{2\delta}\right)_0^{\delta} = \frac{2}{\pi}\left(\delta-\frac{\delta^2}{2\delta}\right) = \frac{\delta}{\pi}, \quad (3)$$

(0.5 pto.)

además

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\,|_0^{\delta} - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left(-\frac{1}{\delta}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\,dx$$
$$= -\frac{2}{\delta\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\,|_0^{\delta} = -\frac{2}{\delta\pi}\frac{\cos(n\delta)}{n^2} + \frac{2}{\delta\pi}\frac{1}{n^2} = 2\frac{(1-\cos(n\delta))}{n^2\delta\pi}, \quad (4)$$

y reemplazando en la serie se completa la demostración.

(0.5 pto.)

(iii) Calculemos la transformada de Fourier de la función, luego

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)e^{-i\xi x}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{0}\left(1+\frac{x}{\delta}\right)e^{-i\xi x}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)e^{-i\xi x}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{x}{\delta}\right)\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\,|_{-\delta}^{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{0}\frac{1}{\delta}\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\,dx$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\,|_0^{\delta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\delta}\frac{1}{\delta}\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-i\xi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-i\xi\delta)}\int_{-\delta}^{0} e^{-i\xi x}\,dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-i\xi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-i\xi\delta)}\int_{0}^{\delta} e^{-i\xi x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-i\xi\delta)}\int_{-\delta}^{0} e^{-i\xi x}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-i\xi\delta)}\int_{0}^{\delta} e^{-i\xi x}\,dx$$
$$= -\frac{i}{\xi\,\delta\,\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{0} e^{-i\xi x}\,dx + \frac{i}{\xi\,\delta\,\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\delta} e^{-i\xi x}\,dx$$
$$= -\frac{i}{\xi\,\delta\,\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\,|_{-\delta}^{0} + \frac{i}{\xi\,\delta\,\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\,|_0^{\delta}$$
$$= -\frac{i}{\xi\,\delta\,\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-i\xi}-\frac{e^{i\xi\delta}}{-i\xi}\right) + \frac{i}{\xi\,\delta\,\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-i\xi\delta}}{-i\xi}-\frac{1}{-i\xi}\right)$$
$$= \frac{1}{\xi^2\,\delta\,\sqrt{2\pi}}\left(2-e^{i\xi\delta}-e^{-i\xi\delta}\right) = \frac{2\,(1-\cos(\xi\,\delta))}{\xi^2\,\delta\,\sqrt{2\pi}}. \quad (5)$$

(1.5 pto.)

(b) (i) Sea f una función a valores reales, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\hat{f}(\xi)} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)e^{-i\xi x}\,dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{e^{-i\xi x}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\,(-\xi)\,x}\,dx = \hat{f}(-\xi). \quad (6)\end{aligned}$$

(0.5 pto.)

(i) Veamos la paridad de la transformada de Fourier, luego

$$\hat{f}(-\xi) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\xi)x}\,dx \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi(-x)}\,dx \quad (7)$$

y considerando el cambio de variables $y = -x$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi(-x)}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(-y)e^{-i\xi y}\,(-\,dy) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(-y)e^{-i\xi y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{-i\xi y}\,dy. \quad (8)\end{aligned}$$

Así si f es par, entonces $f(-y) = f(y)$ y por lo tanto

$$\hat{f}(-\xi) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{-i\xi y}\,dy \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy \; = \; \hat{f}(\xi), \quad (9)$$

(0.5 pto.)

y la transformada de Fourier es par, por otra parte si f es impar, es decir, $f(-y) = -f(y)$, entonces,

$$\hat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{-i\xi y}\,dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy = -\hat{f}(\xi), \quad (10)$$

y la trnasformada de Fourier es impar.

(0.5 pto.)

(iii) Finalmente, como

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{-i\xi y}\,dy$$

se tiene que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{-i\xi 0}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy.$$

(1,0 pto.)

Problema 3

Considere la ecuación de calor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0\\
u(0,t) &= u(1,t), \quad t > 0\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad t > 0\\
u(x,0) &= f(x).
\end{aligned}$$

(i) Usando el método de separación de variables demuestre

$$u(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x},$$

donde a_n son los coeficientes de Fourier de f.

(4 ptos.)

(ii) Sea

$$H_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}.$$

Demuestre que $u(x,t) = (f * H_t)(x)$ donde la convolución de funciones periódicas de periodo 1 se define como

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(x-y) g(y)\, dy.$$

(2 ptos.)

Solución:

(i) Para resolver la ecuación, consideremos el método de separación de variables, es decir,

$$u(x,t) = X(x)\, T(t),$$

luego se tiene que

$$XT' = X''T \Longrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda = \text{cte}.$$

De las condiciones de borde se tiene que

$$X(0)T(t) - X(1)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) - X(1) = 0$$

y además

$$X'(0)T(t) - X'(1)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) - X'(1) = 0.$$

(1,0 pto.)

Veamos el problema para X y consideremos los casos siguientes:

caso $\lambda = 0$:

Así tenemos que

$$X(x) = a + bx,$$

luego de las condiciones de borde se tiene que

$$X(0) = X(1) \Longrightarrow a = a + b \Longrightarrow b = 0$$

además

$$X'(0) = X'(1) \Longrightarrow b = b = 0$$

por lo tanto tenemos el caso $\lambda_0 = 0$ y $X_0 = a_0$.

(0.5 pto.)

caso $\lambda = k^2 > 0$:

Así tenemos que

$$X(x) = ae^{kx} + be^{-kx},$$

luego de las condiciones de borde se tiene que

$$X(0) = X(1) \Longrightarrow a + b = ae^k + be^{-k}$$

además

$$X'(0) = X'(1) \Longrightarrow ak - bk = ake^k - bke^{-k}$$

y multiplicando la primera ecuación por k y sumńdola a la segunda se tiene que

$$2ak = 2ake^k \Longrightarrow 2ak(1 - e^k) = 0 \Longrightarrow a = 0,$$

y así tenemos que

$$b = bke^{-k} \Longrightarrow b(1 - e^{-k}) = 0 \Longrightarrow b = 0,$$

por lo tanto tenemos que $X(x) = 0$.

(0.5 pto.)

caso $\lambda = -k^2 < 0$:

Así tenemos que

$$X(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx),$$

luego de las condiciones de borde se tiene que

$$X(0) = X(1) \Longrightarrow a = a\cos(k) + b\sin(k) \Longrightarrow a(1 - \cos(k)) - b\sin(k) = 0$$

además

$$X'(0) = X'(1) \Longrightarrow bk = -ak\sin(k) + bk\cos(k) \Longrightarrow b(1 - \cos(k)) + a\sin(k) = 0.$$

Veamos la resolución del sistema, consideremos dos casos, el primero es $\sin(k) \neq 0$, luego $(1 - \cos(k)) \neq 0$, por lo tanto tenemos que el sistema

$$\begin{aligned} a(1 - \cos(k)) - b\sin(k) &= 0 \\ a\sin(k) + b(1 - \cos(k)) &= 0, \end{aligned}$$

y el determinante de la matriz es $\sin(k)(1 - \cos(k)) \neq 0$, luego el sistema tiene una única solución $a = b = 0$.

Veamos ahora el caso $\sin(k) = 0$, luego tenemos que $k = n\pi$, con $n \in \mathbb{N}$, y la solución es de la forma

$$X_n = a\cos(n\pi x) + b\sin(n\pi x),$$

luego tenemos además que

$$X(0) = X(1) \Longrightarrow a = a\cos(n\pi) \Longrightarrow a = a(-1)^n \Longrightarrow n \text{ es par.}$$

además

$$X'(0) = X'(1) \Longrightarrow bn\pi = bn\pi\cos(n\pi) \Longrightarrow b = b(-1)^n \Longrightarrow n \text{ es par.}$$

Luego tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos soluciones de la forma

$$X_n(x) = a_n\cos(2n\pi x) + b_n\sin(2n\pi x),$$

donde

$$\lambda_n = -(2n\pi)^2 = -4n^2\pi^2.$$

(1,0 ptos.)

Así tenemos soluciones de la forma

$$T_n(t) = e^{-4n^2\pi^2 t}$$

y la solución del problema es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x))\, e^{-4n^2\pi^2 t}$$

o bien, escribiendo la serie en términos de exponenciales complejas se tiene que

$$u(x,t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n e^{2ni\pi x} + \beta_n e^{2ni\pi x}\right) e^{-4n^2\pi^2 t},$$

es decir,

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2ni\pi x} e^{-4n^2\pi^2 t},$$

y evaluando en $t = 0$, tenemos que

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2ni\pi x},$$

es decir, los coeficientes c_n son los coeficientes de Fourier de la función f.

(1,0 ptos.)

(ii) Notemos que $(f * H_t)(x) = (H_t * f)(x)$, luego

(0.5 ptos.)

$$\begin{aligned} H_t * f(x) &= \int_0^1 H(x-y) f(y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n(x-y)} f(y) \right) dy \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} \int_0^1 \left(e^{2\pi i n(x-y)} f(y) \right) dy \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x} \int_0^1 \left(e^{-2\pi i n y} f(y) \right) dy \end{aligned} \quad (11)$$

(1,0 ptos.)

como $\int_0^1 \left(e^{-2\pi i n y} f(y)\right) dy$ corresponde al coeficiente de Fourier de f, concluimos que

$$H_t * f(x) = u(x,t),$$

lo que completa el ejercicio.

(0.5 ptos.)