Pauta Control 3
MA2002: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores: Raúl Gormaz, Rodrigo Lecaros, Héctor Ramírez y Mauricio Soto.
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

P1).

a) (2.5 pts) Utilizando variable compleja, encuentre el valor de

$$\int_0^{\pi} \frac{2}{5-\cos(2\theta)}d\theta.$$

Respuesta: Llamaremos

$$I = \int_0^{\pi} \frac{2}{5-\cos(2\theta)}d\theta,$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{2}{5-\cos(2\theta)}d\theta \qquad \text{Usando el cambio de variable } 2\theta=\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-\cos(\alpha)}d\alpha. \end{aligned}$$

Ahora, definiendo $z = e^{i\alpha}$ con $\alpha \in [0, 2\pi]$, tenemos $\cos(\alpha) = (z + z^{-1})/2$ y obtenemos

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2}{10-z-z^{-1}}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{10z-z^2-1}dz,$$

si definimos $p(z) = 10z - z^2 - 1$, tenemos

$$\begin{aligned} p(z) &= 10z - z^2 - 1 = -(z-5)^2 + 24 \\ &= (\sqrt{24}+5-z)(\sqrt{24}-5+z) \\ &= (r_1 - z)(z - r_2), \end{aligned}$$

donde $r_1 = \sqrt{24}+5$ y $r_2 = -\sqrt{24}+5$, claramente ls raíces de p son r_1 y r_2 claramente r_1 esta fuera de $\{z : |z| = 1\}$, pero

$$|r_2| < 1 \Leftrightarrow 5-\sqrt{24} < 1 \Leftrightarrow 4 < \sqrt{24} \Leftrightarrow 16 < 24.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{p(z)}dz = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{(r_1-z)(z-r_2)}dz \\ &= \frac{2}{i(r_1-r_2)}\oint_{|z|=1} \left(\frac{1}{(r_1-z)} + \frac{1}{(z-r_2)}\right)dz, \end{aligned}$$

como $|r_1| > 1$ tenemos

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{(r_1-z)}dz = 0,$$

y como $|r_2| < 1$ tenemos

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-r_2)}dz = 2\pi i.$$

Usando esto, tenemos

$$I = \frac{2}{i(r_1+r_2)}2\pi i = \frac{2\pi}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

b) (2.5 pts) Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Demuestre que el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos(\alpha x)$, esta dado por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \sum_{k\geq 1} 2\alpha(-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi(k^2-\alpha^2)}\cos(kx). \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

Respuesta: Primero notamos que f es par, con lo que tenemos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k \cos(kx), \quad \forall x \in (-\pi,\pi),$$

donde

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(kx)dx,$$

observemos que

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y),$$

y

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y),$$

sumando obtenemos

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right),$$

Remplazando

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\left((\alpha+k)x\right) + \cos\left((k-\alpha)x\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\left((\alpha+k)x\right)}{(\alpha+k)}\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{\mathrm{sen}\left((k-\alpha)x\right)}{(k-\alpha)}\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\left((\alpha+k)\pi\right)}{(\alpha+k)} + \frac{\mathrm{sen}\left((k-\alpha)\pi\right)}{(k-\alpha)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)\cos(k\pi)}{(\alpha+k)} - \frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)\cos(k\pi)}{(k-\alpha)}\right) = 2\alpha(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)}{\pi(k^2-\alpha^2)}
\end{aligned}$$

de esta forma, tenemos

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \sum_{k\geq 1} 2\alpha(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)}{\pi(k^2-\alpha^2)}\cos(kx). \quad \forall x \in (-\pi,\pi) \tag{0.1}$$

c) (1 pts) A partir de lo anterior muestre que

$$\pi = 4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-1}.$$

Respuesta: Como f es par y continua, podemos evaluar (0.1) en el borde $x=\pi$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha\pi) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \sum_{k\geq 1} 2\alpha(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)}{\pi(k^2-\alpha^2)}\cos(k\pi) \\
\Leftrightarrow\ &\pi\frac{\cos(\alpha\pi)}{\mathrm{sen}(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k\geq 1} 2\alpha(-1)^{k+1}\frac{1}{(k^2-\alpha^2)}(-1)^k \\
\Leftrightarrow\ &\pi\,\mathrm{cotg}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} - \sum_{k\geq 1}\frac{2\alpha}{(k^2-\alpha^2)}.
\end{aligned}$$

y remplazando $\alpha = 1/4$ en esta ultima identidad, obtenemos

$$\pi = 4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-1}.$$

P2). Considere la ecuación de Laplace con condiciones de borde tipo Neumann en el cuadrado $(0,\pi)\times(0,\pi)$:

$$\begin{array}{ll}
\Delta u = 0 & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi \\
u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0 & 0<y<\pi \\
u_y(x,\pi) = 0 & 0<x<\pi \\
u_y(x,0) = f(x) & 0<x<\pi \\
u(0,0) = 0. &
\end{array} \tag{*}$$

a) (2 pto.) Pruebe que si u es alguna solución de (*) entonces el flujo de ∇u a través del borde de $[0,\pi]\times[0,\pi]$ es nulo. Concluya que $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$.

Respuesta: Si integramos en $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$ la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Delta u dV \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi (u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y))dxdy \\ &= \int_0^\pi u_x(\pi,y)dy - \int_0^\pi u_x(0,y)dy + \int_0^\pi u_y(x,\pi)dx - \int_0^\pi u_y(x,0)dx, \end{aligned}$$

con esto hemos obtenido que el flujo de ∇u es cero en el borde de Ω y remplazando las condiciones de borde, obtenemos

$$0 = -\int_0^\pi f(x)dx.$$

b) (4 ptos.) Dado $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$, encuentre una solución u de (*), por el método de separación de variables.

Respuesta: Notamos que

$$\int_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)dx = 0.$$

De esta forma tenemos la compatibilidad descrita en la parte anterior.

Ahora, buscaremos $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, remplazando en la ecuación y dividiendo por u, obtenemos

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = 0,$$

de esta forma obtenemos

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \quad \psi''(y) = -\lambda\psi(y),$$

con λ una constante a determinar. Veamos la condición de borde

$$u_x(0,y) = \varphi'(0)\psi(y) = 0 \Rightarrow \ \varphi'(0) = 0,$$

$$u_x(\pi,y) = \varphi'(\pi)\psi(y) = 0 \Rightarrow \ \varphi'(\pi) = 0.$$

De esta forma resolveremos el sistema

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \lambda\varphi(x), \quad x\in(0,\pi), \\ \varphi'(0) &= 0, \\ \varphi'(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Caso: $\lambda = 0$. Entonces $\varphi(x) = Ax + B$, usando las condiciones de borde, obtenemos $\varphi(x) = B$, es decir la función constante.

Caso: $\lambda \neq 0$. Considerando que podemos tener constantes complejas, las solución de la EDO, esta dada por

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x},$$

Considerando las condiciones de borde.

$$0 = \varphi'(0) = \sqrt{\lambda}(A - B) \ \Rightarrow \ A = B,$$

de esta forma

$$\varphi(x) = A(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Usando la otra condición de borde, obtenemos

$$0 = \varphi'(\pi) = A\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) \ \Rightarrow \ e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 1,$$

por lo tanto, $\sqrt{\lambda} = ik$, con $k\in\mathbb{Z}$, es decir

$$\lambda_k = -k^2, \ \ k = 1,2,3,...$$

De esta forma obtenemos que $\lambda = -k^2$ y

$$\varphi_k(x) = A_k \cos(kx), \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Busquemos la solución para $\psi(y)$, es decir, que cumpla $\psi''(y) = k^2\psi(y)$ y de la condición de contorno

$$0 = u_y(x,\pi) = \varphi(x)\psi'(\pi) \quad \Rightarrow \quad \psi'(\pi) = 0.$$

Caso $k = 0$. Entonces $\psi(y) = Ay+B$ y usando la condición de contorno, obtenemos $\psi(y) = B$ una función constante.

Caso $k \geq 1$. Para este caso obtenemos

$$\psi(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky},$$

y usando la condición de contorno, obtenemos

$$0 = \psi'(\pi) = Ake^{k\pi} - Bke^{-k\pi} \quad \Rightarrow \quad Ae^{k\pi} = Be^{-k\pi}.$$

De esta forma si denotamos por $A_k = Ae^{k\pi} = Be^{-k\pi}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(y) &= Ae^{ky} + Be^{-ky} \\ &= Ae^{k\pi}e^{k(y-\pi)} + Be^{-k\pi}e^{-k(y-\pi)} \\ &= A_k\Big(e^{k(y-\pi)} + e^{-k(y-\pi)}\Big) \\ &= 2A_k \cosh(k(y-\pi)). \end{aligned}$$

De esta forma, usando el principio de superposición de soluciones, podemos obtener la solución de la forma:

$$u(x,y) = A_0 + \sum_{k\geq 1} A_k \cosh(k(y-\pi))\cos(kx). \tag{0.2}$$

Usando la condición inicial $u_y(x,0) = f(x)$, debemos buscar A_k, $k \geq 0$, tal que

$$f(x) = u_y(x,0) = -\sum_{k\geq 1} kA_k \mathrm{senh}(k\pi)\cos(kx). \tag{0.3}$$

Debemos buscar f como una combinación de cosenos.

Dado que

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x),$$

si escogemos $A_k = 0$, para $k = 1, 3, 4, 5, ...$, y el único que no es cero es $A_2 = -\frac{1}{4\mathrm{senh}(2\pi)}$, De esta forma las soluciones son:

$$u(x,y) = A_0 - \frac{\cosh(2(y-\pi))}{4\mathrm{senh}(2\pi)}\cos(2x).$$

Ahora imponiendo la ultima condición $u(0,0) = 0$, es decir

$$0 = A_0 - \frac{\cosh(2\pi)}{4\mathrm{senh}(2\pi)} \quad \Leftrightarrow \quad A_0 = \frac{\cosh(2\pi)}{4\mathrm{senh}(2\pi)}.$$

Con lo cual obtenemos

$$u(x,y) = \frac{\cosh(2\pi)}{4\mathrm{senh}(2\pi)} - \frac{\cosh(2(y-\pi))}{4\mathrm{senh}(2\pi)}\cos(2x).$$

P3).

a) (2 pts.) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrables y continuas. Denotemos por $\mathcal{T}$ la transformada de Fourier y

$$F(s) = \mathcal{T}(f)(s), \quad G(s) = \mathcal{T}(g)(s),$$

asumiremos que F, G son integrables. Demuestre que

$$(F * G)(s) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{T}(fg)(s) \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Indicación: Calcule la antitransformada de Fourier de $F * G$.

Respuesta: Probaremos

$$\mathcal{T}^{-1}(F * G)(x) = \sqrt{2\pi} f(x)g(x),$$

Dado que F y G son funciones integrables, podemos usar la formula para la anti transformada de Fourier, es decir

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{-1}(F * G)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F * G(s) e^{isx} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)G(s-z)dz e^{isx} ds \quad \text{aplicando Fubini} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(s-z) e^{isx} ds \right) dz \quad \text{utilizando el cambio de variable } y = s - z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{i(y+z)x} dy \right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{izx} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{iyx} dy \right) dz \\
&= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{izx} dz \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{iyx} dy \right) \\
&= \sqrt{2\pi} f(x)g(x).
\end{aligned}$$

Al tomar transformada se obtiene el resultado.

b) (1 pts) Usando (a), demuestre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)G(-s)ds = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt.$$

Respuesta: Al evaluar la formula de la parte anterior en $s = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& (F * G)(0) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{T}(fg)(0) \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)G(0-z)dz = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-i0x}dx,
\end{aligned}$$

con lo cual se obtiene el resultado.

c) (1 pts.) Asuma que f, g son funciones a valores reales (es decir, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), y tales su producto fg es integrable. Usando (b), demuestre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\overline{G(s)}ds = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt,$$

y concluya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)|^2 ds = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt.$$

Respuesta: Es necesario probar que $G(-s) = \overline{G(s)}$,

$$\begin{aligned}
G(-s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{isx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\overline{e^{-isx}}dx \quad \text{como } s \text{ es real} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(x)e^{-isx}}dx \quad \text{dado que } g \text{ es a valores reales} \\
&= \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-isx}dx} \\
&= \overline{G(s)},
\end{aligned}$$

de esta forma, usando la parte (b), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\overline{G(s)}ds = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt,$$

y finalmente remplazando en esta formula $g = f$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)|^2 ds = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt.$$

d) (2.0 pts.) Usando (c), encuentre el valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(3y)}{y^2} dy.$$

Indicación: Recuerde que la transformada de Fourier de la función

$$U_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a, \end{cases}$$

donde $a > 0$, esta dada por

$$\frac{2\operatorname{sen}(as)}{s\sqrt{2\pi}}.$$

Respuesta: Si usamos la formula de la parte anterior con $f = U_a$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{T}(U_a)(s)|^2 ds = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_a^2(t) dt \\ \Leftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}(as)}{s} \right)^2 ds = \sqrt{2\pi} \int_{-a}^{a} 1 dt \\ \Leftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(as)}{s} \right)^2 ds = \pi a \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Ahora tomando $a = 3$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(3y)}{y} \right)^2 dy = \pi 3 \sqrt{2\pi}.$$