FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA26B Matemáticas Aplicadas. Semestre 2007-2. Sección 2.

Profesor: J. Dávila Auxiliar: M. Concha

Pauta Control 3

22 de octubre de 2007

Pregunta 1.

a) (3 ptos) Encuentre la serie de Laurent en el anillo indicado de

i) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}, \quad 0 < |z| < 2$

Notemos que:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z^2\left(\frac{z}{2}-1\right)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{1}{2}^k z^k\right) = -\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{1}{2}^{k+1} z^{k-2}\right)$$ + 1,5.

ii) $f(z) = z^2 e^{1/z}, \quad |z| > 0.$

Notemos que

$$f(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z}^k = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} z^{2-k}$$

b) (1 pto) Para las funciones anteriores calcule $\int_C f(z)\,dz$ donde C es el círculo de centro 0 y radio 1 orientado positivamente.

Para esto basta notar que el valor de la integral corresponde a $2\pi i a_{-1}$; en donde a_{-1} es el coeficiente asociado a $\frac{1}{z}$ en el desarrollo en serie de Laurent.

De este modo:

Para i): $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \frac{-1}{4} = -\frac{\pi i}{2}$ (En este caso el disco C está contenido en el anillo en donde está definido el desarrollo de Laurent de f, de modo que el resultado es cierto)

Para ii): $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \frac{1}{3!} = \frac{\pi i}{3}$

c) (2 ptos) Determine cuáles de las siguientes funciones es armónica, y en dicho caso encuentre una armónica conjugada

i) $e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$ *ii)* $e^{-x}(x\cos(y) - y\sin(y))$

Calculemos las derivadas parciales en cada caso:

i) $f(x,y) = e^x\left(x\cos(y) - y\sin(y)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x\left(x\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y)\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x\left(x\cos(y) - y\sin(y) + 2\cos(y)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x\left(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x\left(-x\cos(y) - 2\cos(y) + y\sin(y)\right)$$

De modo que $\Delta f = 0$

Podemos calcular la armónica conjugada:

Buscamos g tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$

De la primera ecuación tenemos que: $g(x,y) = e^x\left(x\sin(y) + y\cos(y)\right) + c(x)$

de modo que $\frac{\partial g}{\partial x} = e^x\left(x\sin(y) + y\cos(y) + \sin(y)\right) + c'(x)$

Así, igualando a la segunda ecuación se obtiene que: $c'(x) = 0$ con lo que una armónica conjugada de f es $g(x,y) = e^x\left(x\sin(y) + y\cos(y)\right)$

ii) $f(x,y) = e^{-x}\left(x\cos(y) - y\sin(y)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x}\left(-x\cos(y) + y\sin(y) + \cos(y)\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x}\left(x\cos(y) - y\sin(y)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\left(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-x}\left(-x\cos(y) - 2\cos(y) + y\sin(y)\right)$$

De modo que $\Delta f(x,y) = -2e^{-x}\left(cos(y)\right)$ y la función no es armónica.

Pregunta 2. a) (4 ptos) Encuentre la solución de

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0 \quad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)\\
&u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad y \in (0,\pi)\\
&u(x,\pi) = 0 \quad x \in (0,\pi)\\
&u(x,0) = f(x) \quad x \in (0,\pi)
\end{aligned}$$

donde f es una función continua.

b) (2 ptos) Encontrar la solución del problema anterior para el caso

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pregunta 3. Queremos resolver el problema

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad x > 0, t > 0x,$$

Pregunta 2

$$\Delta u = 0 \qquad (x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi)$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$$

$$u(x,\pi) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

a) Primero buscamos una solución de la forma

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\Delta u = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)$$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const}, \qquad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{const.}$$

$\boxed{\text{separar variables: } 0{,}5}$

Consideremos primero $\dfrac{X''}{X} = A$

Caso $A > 0$ $\quad X(x) = c_1 e^{\sqrt{A}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{A}\,x}$

Pero $u(0,y) = 0$ conduce a $X(0) = 0$

$u(\pi,y) = 0$ " " $X(\pi) = 0$

$$\Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 e^{\sqrt{A}\,\pi} + c_2 e^{-\sqrt{A}\,\pi} = 0$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ lo que da la solución trivial que descartamos

Caso $A=0$ $\quad X(x) = mx+n$

$$X(0)=0 \Rightarrow n=0$$
$$X(\pi)=0 \Rightarrow m=0$$

y también encontramos la solución trivial.

Caso $A<0$ $\quad A=-\lambda^2, \lambda>0$

$$X''=-\lambda X \Rightarrow X = c_1 \operatorname{sen}(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x).$$

$$X(0)=0 \Rightarrow c_2=0$$
$$X(\pi)=0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\lambda\pi)=0 \Rightarrow \lambda=k \text{ con } k=1,2,3,\ldots$$

Luego $\boxed{X(x)=\operatorname{sen}(kx)}$ $\quad$ $\boxed{\text{expresión para } X: 1,0}$

La ecuación para Y:

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda^2 = k^2$$

$$\Rightarrow Y(y) = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky}$$

Pero $u(x,\pi)=0 \Rightarrow Y(\pi)=0 \Rightarrow c_1 e^{k\pi} + c_2 e^{-k\pi} = 0$

$$\Rightarrow c_1 = -c_2 e^{-2k\pi}$$

$$\Rightarrow Y(y) = -c_2 e^{-2k\pi} e^{ky} + c_2 e^{-ky}$$
$$= c_2(-e^{-2k\pi}e^{ky} + e^{-ky})$$

$\boxed{\text{expresión para } Y: 1,0}$

Luego encontramos una solución u_k

$$u_k(x,y) = c_k \operatorname{sen}(kx)\left(e^{-ky} - e^{ky-2k\pi}\right)$$

expresión para u_k : 0,5

que satisface $\Delta u_k = 0$

$$u_k(0,y) = u_k(\pi,y) = 0 \qquad y \in (0,\pi)$$

$$u_k(x,\pi) = 0 \qquad x \in (0,\pi).$$

Definamos $$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(kx)\left(e^{-ky} - e^{ky-2k\pi}\right)$$

solución en forma de serie : 0,5

Queremos ajustar c_k de modo que

$$u(x,0) = f(x) \qquad x \in (0,\pi)$$

Pero $$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(kx)\left(1 - e^{-2k\pi}\right)$$

Por otro lado considerando la extensión impar de f tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(kx)$$

donde $$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\,dx$$

Luego elegimos

$$c_k = \frac{b_k}{1-e^{-2k\pi}} = \frac{2}{\pi\left(1-e^{-2k\pi}\right)} \int_0^{\pi} f(x)\, \text{sen}(kx)\, dx$$

$\boxed{c_k \text{ en función de } f \cdot 9.5}$

b) $f(x) = x - \pi/2$

$$\int_0^{\pi} (x - \pi/2)\, \text{sen}(kx)\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$= \int_0^{\pi} x\, \text{sen}(k\pi)\, dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \text{sen}(kx)\, dx$$

integración por partes: 1,0

$$= x\left(\frac{-\cos(kx)}{k}\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx - \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \text{sen}(kx)\, dt$$

$$= -\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \underbrace{\frac{1}{k^2}\,\text{sen}(k.x)\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{-\cos(kx)}{k}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{\pi}{2k}\cos(k\pi) \longleftarrow$$

suficiente como resultado: 0,5

$$= \frac{\pi}{2k}\cos(k\pi) = \frac{\pi}{2k}(-1)^k$$

Luego

$$c_k = \frac{2}{\pi(1 - e^{-2k\pi})}\,\frac{\pi}{2k}(-1)^k = \frac{(-1)^k}{k(1 - e^{-2k\pi})}$$

fórmula de c_k: 0,5

y la solución es

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(1 - e^{-2k\pi})}\,\text{sen}(kx)\left(e^{-ky} - e^{ky-2k\pi}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(e^{k\pi} - e^{-k\pi})}\,\text{sen}(kx)\left(e^{k\pi - ky} - e^{ky - k\pi}\right)$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k \operatorname{senh}(k\pi)} \operatorname{sen}(kx) \operatorname{senh}(k(\pi - y))}$$

Pregunta 3

a) $$\begin{cases} u_t = k u_{xx} + u_x & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R} \\ u(\pm\infty, t) = 0 & t>0 \end{cases}$$

$$\hat{u}_t = -ks^2\hat{u} + is\hat{u}$$
$$= (-ks^2+is)\hat{u}$$

$\boxed{\text{ecuación para } \hat{u} : 0,5}$

$$\hat{u}(s,t) = \hat{u}(s,0)\, e^{(-ks^2+is)t}$$
$$= \hat{f}(s)\, e^{(-ks^2+is)t}$$

$\boxed{\text{solución } \hat{u} : 0,5}$

$$\widecheck{e^{(-ks^2+is)t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs + (-ks^2+is)t}\, ds$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x+t) - kts^2}\, ds$$

$\boxed{\text{antitransformada paso 1 : 0,5}}$

= antitransformada de e^{-kts^2} evaluada en $x+t$

antitransformada de e^{-kts^2}

$$\widehat{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}}(s) = \lambda\, e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 s^2} \qquad -\frac{1}{2}\lambda^2 = -kt \qquad \lambda^2 = 2kt \qquad \lambda = \sqrt{2kt}$$

$$\widecheck{e^{-kts^2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$\widecheck{e^{(-ks^2+is)t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{(x+t)^2}{4kt}}$$

$\boxed{\text{antitransformada } 1,0}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y+t)^2}{4kt}} f(y)\, dy$$

$\boxed{\text{solución (convolución) } 0,5}$

b)

$$\frac{d}{ds}\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{intercambio derivada e } \int : 0{,}5}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-ixs} f(x)\,dx$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs}\, ix f(x)\,dx$$

$$= -i\,\widehat{xf(x)}(s)$$

$\boxed{0{,}5}$

c) i) $\widehat{x^2 e^{-x^2}}(s)$

Usamos que $\frac{d}{ds}\hat{f}(s) = -i\,\widehat{x f(x)}(s)$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{ds^2}\hat{f}(s) = -\widehat{x^2 f(x)}(s).$$

$\boxed{\text{2 veces parte b: 0,2}}$

Calculemos $\widehat{e^{-x^2}}(s)$. Para esto recordemos que

$$\widehat{e^{-\frac{1}{2}x^2}}(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2}$$

$$\widehat{f\left(\tfrac{x}{\lambda}\right)}(s) = \lambda \hat{f}(\lambda s).$$

Eligiendo $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ y $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \widehat{e^{-x^2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\widehat{e^{-\frac{1}{2}x^2}}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

$\boxed{\text{transf. de } e^{-x^2}\text{: 0,4}}$

Luego $\widehat{x^2 e^{-x^2}}(s) = -\frac{d^2}{ds^2}\widehat{e^{-x^2}}(s)$

$$= -\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{s^2}{4}}\left(-\frac{s}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{s^2}{4}}\cdot s\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}\left(-\frac{2s^2}{4}+1\right) \quad \boxed{0,4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}\left(1-\frac{s^2}{2}\right)$$

ii) $f(x) = \dfrac{x}{a^2+x^2}$. Calculemos para $s>0$

división en casos: 0,2

$$\hat{f}(s) = \widehat{\frac{x}{a^2+x^2}}(s) = i \frac{d}{ds} \widehat{\frac{1}{a^2+x^2}}(s)$$

$$= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|s|}$$

$$= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} (-a) e^{-as}$$

$$= - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as}$$

caso $s>0$: 0,4

Para $s<0$

$$\hat{f}(s) = i \frac{d}{ds} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|s|}$$

$$= i \frac{d}{ds} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{as}$$

$$= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{as}$$

caso $s<0$: 0,4

Luego $\hat{f}(s) = -\text{signo}(s)\, i \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}$