MA2002-1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau, Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 13

06 de Diciembre de 2016

1. Resumen

Definición 1 (Serie de Fourier)**.** Sea $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ una función continua (basta continua por trozos). Diremos que f admite un desarrollo en serie de Fourier en $(-l, l)$ si existen constantes $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{b\in\mathbb{N}}$ tales que $f(x) = \lim_{N\to\infty} S_f^N(x) = S_f(x)$ donde

$$S_f^N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right),\ \forall x \in [-l, l].$$

Y los coeficientes de Fourier se definen como $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$ y $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$.

Teorema 1. *Si una función $f(x)$ es continua por trozos en el intervalo $[-l, l]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-l, l)$, con derivada por la izquierda en $x = l$ y por la derecha en $x = -l$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ es convergente para cada $x \in [-l, l]$. En los extremos del intervalo se tiene $S_f(l) = S_f(-l) = \frac{1}{2}(f(l) + f(-l))$.*

Proposición 1. *Si f es derivable en $[-l, l]$ y $f(l) = f(-l)$, entonces $f = S_f$ en $[-l, l]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme. Como corolario, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2l$-periódica de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente hacia f.*

Definición 2 (Transformada de Fourier)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable. Se define su transformada como $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys}dy$

Teorema 2 (Teorema de Inversión)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable y supongamos además que $\mathcal{F}f = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es integrable. Entonces se tiene que, si f es continua, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) = \check{\hat{f}}(x)$, donde $\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{isx}ds$ es la **Antitransformada de Fourier**.*

Definición 3 (Convolución)**.** Dadas f, g, integrables, se define el producto de convolución como $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$.

$f(x)$	$\hat{f}(s)$	$f(x)$	$\hat{f}(s)$
e^{-x} $x \geq 0$ 0 $x < 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+is}$	$e^{is_0x}f(x)$	$\hat{f}(s-s_0)$
$e^{-a\|x\|}$, $a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+s^2}$	$f(x-x_0)$	$e^{-isx_0}\hat{f}(x)$
e^{-ax^2}, $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$	$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$, $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a\|s\|}$	$f'(x)$	$is\hat{f}(s)$
$-k$ $\|x\| \leq a$ 0 $\|x\| > a$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{\sin(as)}{s}$	$f(x)\cos(w_0x)$	$\frac{1}{2}(\hat{f}(s-w_0) + \hat{f}(s+w_0))$
$g(x) = f(ax)$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\hat{g}(s) = \frac{1}{\|a\|}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(x)\sin(w_0x)$	$\frac{1}{2i}(\hat{f}(s+w_0) - \hat{f}(s-w_0))$

2. Problemas

P1. Sea $f \in \mathcal{C}^1$, 2π-periódica, tal que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

(a) Pruebe la identidad de Parseval $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

(b) Deduzca que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$.

(c) Concluya la desigualdad de Wirtinger: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$.

P2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Asumamos que f y g son integrables y continuas. Denotemos por $F(s) = \mathcal{F}f(s)$ y $G(s) = \mathcal{F}g(s)$, donde $\mathcal{F}$ denota la trasnformada de Fourier. Asumemos que F y G son funciones integrables.

(a) Muestre que $\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(fg) = F * G$.

(b) Deducir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G(-s)ds$.

(c) Asumir a hora que f y g son funciones a valores reales. Deducir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\bar{G}(s)ds$ y concluir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$.

(d) Encuentre en forma explícita $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})$, donde $\chi_{[-a,a]}$ es la función característica sobre el intervalo $[-a, a]$, con $a > 0$, es decir:

$$\chi_{[-a,a]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{si } x \notin [-a, a] \end{cases}$$

(e) Encuentre el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(3x)}{x^2}dx$.