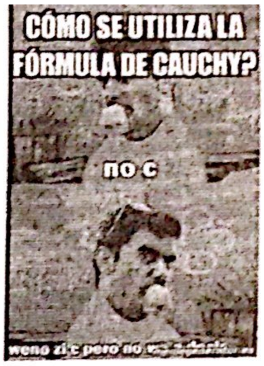
MA2002-1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau , Sebastián Urzúa B.



Auxiliar 11

22 de Noviembre de 2016

1. Resumen

Teorema 1 (Cauchy Goursat, o Teorema de la curva). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y consideremos $f : \Omega \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa donde $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \subseteq \Omega$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado regular por trozos, simple y sea D la región encerrada por Γ. Supongamos $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \subseteq D$ y sea $\varepsilon > 0$ suficietemente pequeño de modo tal que los discos $\overline{D(p_j, \varepsilon)} \subseteq D$ y no se intersecten entre sí. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces: $\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)dz$.*

Teorema 2 (Fórmula de Cauchy). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.*

Teorema 3 (Desarrollo en serie de Taylor). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces existe una sucesión de constantes $c_0, c_1, \cdots \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - p)^k$, $\forall z \in D(p, r)$. Más aún, $c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw$.*

P1. Calcule las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^{-1} - 2)(z - 2)} dz,$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)^2} dx$. **Indicación:** Integre $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$ sobre la curva acotada $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Luego hacer $R \to \infty$.

P2. Usando la representación integral de $f^{(n)}(a)$ dada por la fórmula de Cauchy, pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz,$$

y de aquí pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x\cos(\theta)} d\theta.$$

Fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \oint_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$$\oint_{\partial D(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^{-1}-2)(z-2)}\, dz$$

Sea $g(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^{-1}-2)(z-2)} = \dfrac{-z}{2}\, \dfrac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1/2)(z-2)}$

g no es holomorfa en $z = 1/2$, $z = 2$.

Pero $1/2 \in D(0,1) \wedge 2 \notin D(0,1)$.

Armamos la fórmula de Cauchy ....

$\Rightarrow g(z) = \dfrac{f(z)}{z - 1/2}$, $f(z) = \dfrac{z}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(2-z)}$

El dominio debe ser $\partial D(z_0, R)$

Por Teo de Curva

$$\oint_{\partial D(0,1)} g(z)\,dz = \oint_{\partial D(1/2,1/4)} g(z)\,dz$$, pues $D(1/2, 1/4) \subset D(0,1)$

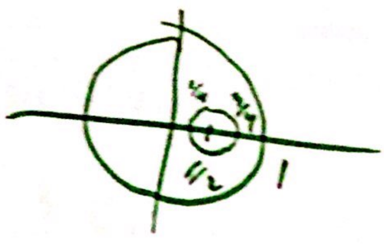
(cualquier radio que cumpla esto sirve)

Finalmente:

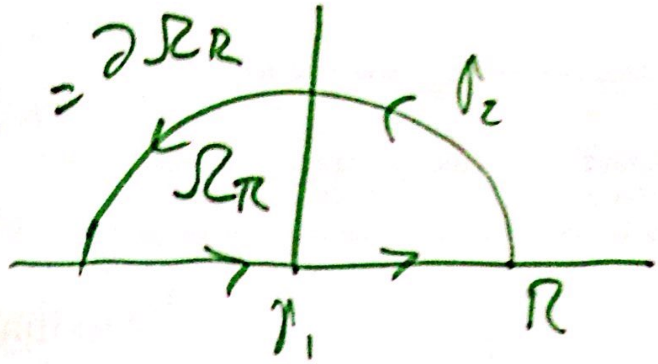
$$\oint_{\partial D(1/2,1/4)} g(z)\,dz = \oint_{\partial D(1/2,1/4)} \frac{f(z)}{z-1/2}\, dz = 2\pi i f(1/2) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{3}$$

$$= \frac{\pi i \sqrt{2}}{3}$$

//



b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$, $\Gamma_R = \partial\Omega_R$



usar $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \quad ;$$

$\gamma_1 : z(t) = t, \ t \in [-R, R]$
$dz = dt$

$\gamma_2 : z(t) = Re^{it}, \ t \in [0, \pi]$
$dz = iRe^{it}\,dt$

$\underline{\gamma_1}|$ $$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{(1+t^2)^2}\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{(1+t^2)^2}\,dt$$

"la parte real/2 es lo que queremos"

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$\underline{\gamma_2}|$ $$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}\, iRe^{it}}{(1+R^2e^{2it})^2}\,dt$$ (hi... Acotar)

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \underset{|\int| \le \int|\cdot|}{\le} \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{iRe^{it}}\, iRe^{it}}{(1+R^2e^{2it})^2} \right| dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R\,|e^{iRe^{it}}|}{|1+R^2e^{2it}|^2}\,dt \quad (*)$$

Veamos num. y den. x separado.

$$\left|e^{iRe^{it}}\right| = \left|e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\,t}\right| = \underbrace{\left|e^{iR\cos t}\right|}_{1}\cdot\left|e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\right|$$

$$= e^{-R\,\mathrm{sen}\,t} \leq e^{-R\frac{2t}{\pi}}$$

Pero $\boxed{\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}}$. Por otro lado:

$$\left|1+R^2e^{2it}\right|^2 = \left|1+R^2\cos 2t + iR^2\,\mathrm{sen}\,2t\right|^2$$

$$= \left(1+R^2\cos(2t)\right)^2 + \left[R^2\,\mathrm{sen}(2t)\right]^2$$

como los términos del denominador hay que acotarlo x abajo.

$$= 1+2R^2\cos 2t + R^4$$

$$\geq 1-2R^2+R^4 = (1-R^2)^2$$

$$(*) \leq \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\cdot\frac{2t}{\pi}}}{(1-R^2)^2} = \frac{R}{(1-R^2)^2}\cdot\frac{-\pi}{2R}\,e^{-R\frac{2t}{\pi}}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2(1-R^2)^2}\left(1-\underbrace{e^{-2R}}_{1}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Así, $\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)}{(1+t^2)^2}\,dt$

Pero $\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{sen}(t)}{(1+t^2)^2}\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ por imparidad.

Pero por otro lado, f se indetermina en $\pm i$.

En particular, $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} = \dfrac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$.

Notemos que $i \in \Omega_R$ ~~a partir~~ para $R > 1$

$-i \notin \Omega_R, \ \forall R$.

Recordamos F. de Cauchy para Derivada (por la potencia en el den.)

$$g'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_0,R)} \frac{g(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

Así, por Teo de Cauchy, $\displaystyle\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \oint_{\partial D(i,1/8)} f(z)\,dz$, a partir de cierto R.

y luego; llamando $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z+i)^2}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2} \qquad \Rightarrow g'(z) = \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2e^{iz}(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$\rightarrow \oint_{\partial D(i,1/8)} f(z)\,dz = \oint_{\partial D(i,1/8)} \frac{g(z)}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, g'(i)$$

$$= \cancel{2}\pi i \cdot \frac{ie^{-1}(-4) - \cancel{2}e^{-1}(2i)}{\cancel{16}_{\cancel{8}_{2}}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\cancel{-i}e^{-1} + e^{-1}\right) \therefore$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\left(e^{-1} + e^{-1}\right) = \frac{\pi}{e}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{e}$$

F. de Cauchy x derivadas : $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Veamos lo que nos piden:

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^{x} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{x^n e^{xz}}{n!\, z^{n+1}}\, dz \text{ . Luego, sea } f(z) = e^{xz}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z) = x^n e^{xz} \Rightarrow f^{(n)}(0) = x^n \text{ .}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{e^{xz}}{z^{n+1}}\, dz \quad //$$

b) $$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{e^{xz}}{z^{n+1}}\frac{x^n}{n!}\, dz$$, hasta N después $N \to \infty$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{e^{xz}}{z}\sum_{n=0}^{N}\frac{(x/z)^n}{n!}\, dz$$

Pero $$\sum_{n=0}^{N}\frac{(x/z)^n}{n!} \xrightarrow{N\to\infty} e^{x/z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{e^{xz}}{z} e^{x/z}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{e^{x(z+1/z)}}{z}\, dz$$

$$\left.\begin{array}{l} z = e^{i\theta} \\ dz = ie^{i\theta}d\theta \end{array}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{x(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}}{\cancel{e^{i\theta}}} \cdot i\cancel{e^{i\theta}}\, d\theta$$

y como $\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = 2\cos\theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\,2\cos\theta}\, d\theta$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\, d\theta \quad \blacksquare$$