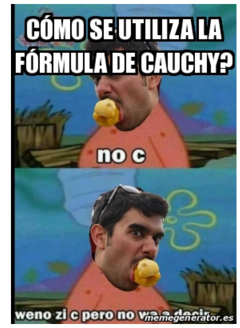

MA2002-1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau , Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 11

22 de Noviembre de 2016

1. Resumen

Teorema 1 (Cauchy Goursat, o Teorema de la curva). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y consideremos $f : \Omega \setminus \{p_1,\ p_2,\ \cdots, p_n\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa donde $\{p_1,\ p_2,\ \cdots, p_n\} \subseteq \Omega$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado regular por trozos, simple y sea D la región encerrada por Γ. Supongamos $\{p_1,\ p_2,\ \cdots, p_n\} \subseteq D$ y sea $\varepsilon > 0$ suficietemente pequeño de modo tal que los discos $\overline{D(p_j, \varepsilon)} \subseteq D$ y no se intersecten entre sí. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)dz$.*

Teorema 2 (Fórmula de Cauchy). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy: $\displaystyle f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.*

Teorema 3 (Desarrollo en serie de Taylor). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces existe una sucesión de constantes $c_0,\ c_1,\ \cdots \in \mathbb{C}$ tales que $\displaystyle f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - p)^k,\ \forall z \in D(p, r)$. Más aún, $\displaystyle c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw$.*

P1. Calcule las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^{-1} - 2)(z - 2)} dz$,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)^2} dx$. **Indicación:** Integre $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$ sobre la curva acotada $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Luego hacer $R \to \infty$.

P2. Usando la representación integral de $f^{(n)}(a)$ dada por la fórmula de Cauchy, pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz,$$

y de aquí pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x\cos(\theta)} d\theta.$$