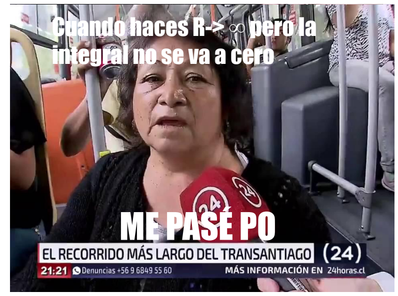

MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 10

16 de Noviembre de 2016

P1. (I) Sea $f = u + iv$ una función holomorfa en un conjunto D abierto y conexo, donde u y v son funciones a valores reales. Suponga que existen constantes a, b, c tales que $a^2 + b^2 \neq 0$ y $au + bv = c$, para todo $z \in D$. Pruebe que f es constante en D.

(II) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ función tal que $f = u + iv$. Dada la función $u(x, y) = e^x((x + 3)cos(y) - y\sin(y))$, determine si existe v tal que f sea holomorfa. En tal caso, encuentre v.

P2. (I) Encuentre el disco de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln(n)^2} z^n$.

(II) Sea $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Encuentre la expansión en serie de potencias en torno a $z_0 = 0$ y calcule su radio de convergencia.

P3. Sea $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$. Considere $f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\bar{D}$ y holomorfa en D. Suponga que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \forall z \in \bar{D}, |z| \geq 1$$

a) Pruebe que $\forall \theta \in [0, \pi/2]$ se tiene

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = e^{i\theta} \int_0^{\infty} f(e^{i\theta}x)dx$$

Hint: Verifique en forma independiente los casos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Para $\theta \in (0, \pi/2)$ integre f sobre la curva dada por el contorno del sector circular de ángulo central θ y radio $R > 0$.

b) Utilice lo anterior para $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z)^2}$ y $\theta = \pi/2$ para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1 + x)^2}dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x^2}dx = 1$$