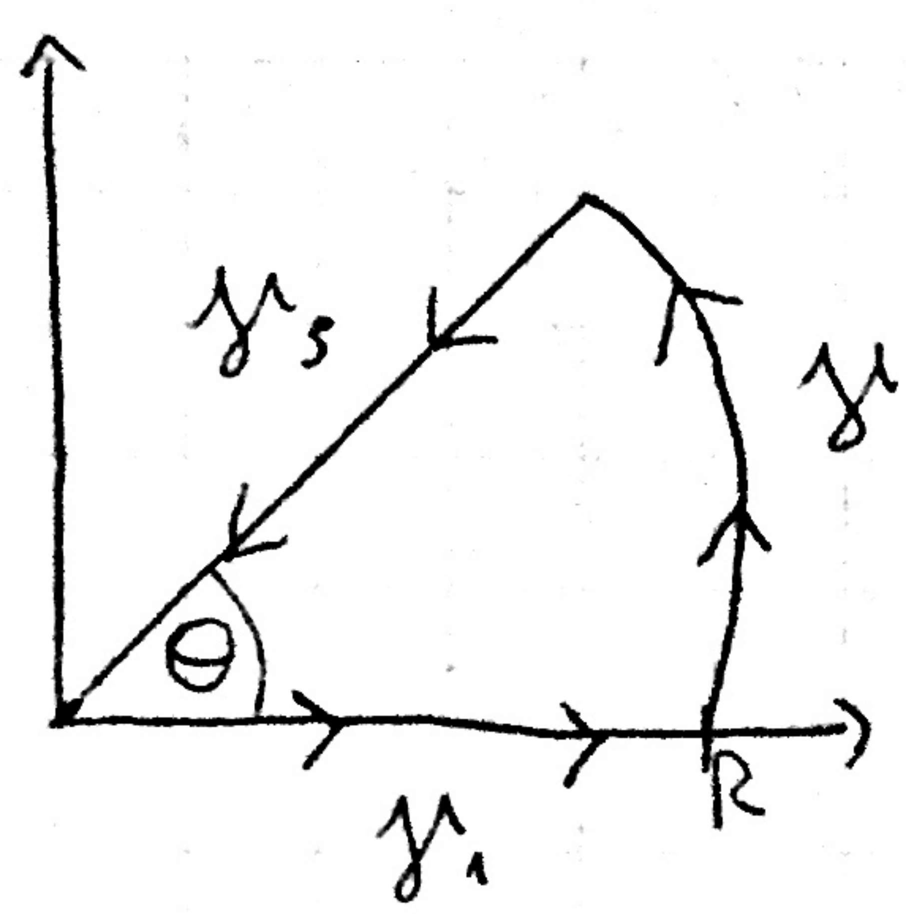
Fecha: / /

P3

Solución P3 Aux 10.

a) Caso $\theta = 0$: directo, pues $e^{i\theta} = e^{i0} = 1$.

Caso $\theta \in [0, \pi/2]$: Tomando la curva del hint:



$$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$$

Calculemos la integral sobre cada γ_i:

γ_1: Una parametrización es $r(t) = t$, con $t \in [0, R]$. Luego, $r'(t) = 1$.

Así: $$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R f(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_0^R f(t)\,dt$$

γ_2: Una parametrización de este arco está dada por $r(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \theta]$. Luego, $r'(t) = iRe^{it}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^\theta f(Re^{it})\, iRe^{it}\,dt$$

γ_3: Una parametrización es $r(t) = (R-t)e^{i\theta}$, $t \in [0, R]$. Luego, $r'(t) = -e^{i\theta}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_0^R f((R-t)e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,dt$$, haciendo $u = R-t$, $du = -dt$,

RHEIN

Fecha: / /

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_R^0 f(ue^{i\theta})e^{i\theta}du = -\int_0^R f(e^{i\theta}u)e^{i\theta}du$$

Así:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \int_0^R f(t)dt + \int_0^\theta f(Re^{it})iRe^{it}dt - \int_0^R f(e^{i\theta}t)e^{i\theta}dt$$

Además, como f es holomorfa en D, y notando que $\forall R>0$, $\Gamma \subset D$, entonces, por Cauchy-Goursat:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0,$$ y así, por lo anterior:

$$\int_0^R f(t)dt + \int_0^\theta f(Re^{it})iRe^{it}dt - \int_0^R f(e^{i\theta}t)e^{i\theta}dt = 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^R f(t)dt + \int_0^\theta f(Re^{it})iRe^{it}dt = \int_0^R f(e^{i\theta}t)e^{i\theta}dt \quad (1)$$

Vemos que, si al tomar $R\to\infty$, el segundo término del lado izquierdo se va a 0, entonces ganamos. Veamos que esto es cierto:

$$\left|\int_0^\theta f(Re^{it})iRe^{it}dt\right| \leq \int_0^\theta |f(Re^{it})|\,\overset{1}{\cancel{|i|}}\,|R|\,\overset{1}{\cancel{|e^{it}|}}\,dt$$

$$\leq \int_0^\theta \frac{M}{|Re^{it}|^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{R}\,dt = \frac{M\theta}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

RHEIN

Fecha: / /

Concluimos así que, tomando límite en la ecuación (1):

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)\,dt + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^\theta f(Re^{it})\,iRe^{it}\,dt}_{0} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(e^{i\theta}t)e^{i\theta}dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(t)\,dt + 0 = e^{i\theta}\int_0^\infty f(e^{i\theta}t)\,dt$$

$$\therefore \int_0^\infty f(x)\,dx = e^{i\theta}\int_0^\infty f(e^{i\theta}x)\,dx \quad //$$

b) Notemos que:

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{iz}}{(1+z)^2}\right| = \frac{e^{-y}}{|(1+z)^2|} \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \forall y \in D.$$

Así, vemos que f cumple la hipótesis de (a) (pues además, claramente es continua en $\bar{D}$ y holomorfa en D).

$$\underset{\text{(con } \theta=\pi/2)}{\overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow}} \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{(1+x)^2}\,dx = e^{i\pi/2}\int_0^\infty \frac{e^{i(e^{i\pi/2}x)}}{(1+e^{i\pi/2}x)^2}\,dx$$

Notemos que $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\,\text{sen}(\pi/2) = 0 + i\cdot 1 = i.$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{(1+x)^2}\,dx}_{(1)} = i\underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+ix)^2}\,dx}_{(2)}$$

Fecha: / /

Tomemos parte real en cada lado:

en (1):

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{(1+x)^2}\,dx\right) = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x)^2}\,dx$$

en (2):

$$\operatorname{Re}\left(i\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+ix)^2}\,dx\right) = \operatorname{Re}\left(i\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-ix)^2}{[(1+ix)(1-ix)]^2}\,dx\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(i\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-2ix-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-x}(i+2x-ix^2)}{(1+x^2)^2}\,dx\right) = \int_0^\infty \frac{2xe^{-x}}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{2xe^{-x}}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad (*)$$

El lado derecho lo resolvemos con vaca:

$$u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}\,dx \;;\; dv = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx \Rightarrow v = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{2xe^{-x}}{(1+x^2)^2}\,dx = \left.\frac{-e^{-x}}{1+x^2}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx$$

$$= 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx$$, reemplazando en $(*)$:

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x)^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx = 1.$$

//