

MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Gino Montecinos G.

Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.



Auxiliar 8

8 de Noviembre de 2016

P1. Calcule $\int_{\gamma} f(z)dz$ en los siguientes casos:

- a) $f(z) = \bar{z}$, con γ la circunferencia de centro 0 y radio 2 y orientada positivamente.
- b) $f(z) = Re(z)$, con γ la semicircunferencia unitaria que pasa por $-i, 1, i$, en ese orden.
- c) $f(z) = z^{\alpha}$, con γ la circunferencia unitaria orientada positivamente, desde $z = 1$.
- d) $f(z) = |z|^2$, con γ el cuadrado de vértices $0, 1, 1 + i, i$.

P2. Sea $b > 0$. Calcule

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx$$

Para ello, integre la función $f(z) = e^{-z^2}$ sobre el rectángulo de vértices $R, R + ib, -R + ib, -R$ y tome límite cuando $R \rightarrow \infty$, probando que las integrales sobre los lados verticales del rectángulo tienden a cero.

P3. Pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Considere la función $f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}$, e integre sobre la curva cerrada $\Gamma = [-R, -\epsilon] \cup \gamma_{\epsilon}^{+} \cup [\epsilon, R] \cup \gamma_R^{+}$, como se muestra en la figura:

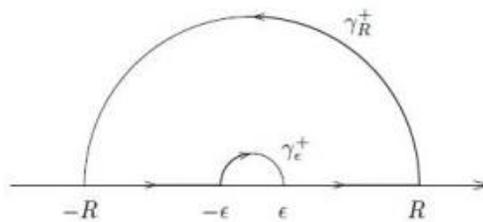


Figura 1: Curva Γ .

P4. Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m} dz$$

Donde γ es la curva dada por la parametrización $r(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $m \in \mathbb{N}$.