Fecha: / /

Solución Auxiliar 7

• Condiciones de Cauchy Riemann (C-R):

Si $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, con $f=u+iv$ es una función diferenciable en $z\in\mathbb{C}$, entonces se satisfacen las ecuaciones de C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

P1) Escribimos $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, con $u(x,y)=\sqrt{|x||y|}$ y $v(x,y)=0$. Luego, calculemos las derivadas parciales en $\vec{0}$:

• $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=0$$

• $$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=0$$

• $$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=0$$

• $$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0=\frac{\partial v}{\partial y}\ \wedge\ \frac{\partial u}{\partial y}=0=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

i.e., se satisfacen C-R en el origen. Veamos que f no es diferenciable en este punto. En este caso, $h\to 0$ en $\mathbb{C}$, por lo que escribiremos $h=h_1+ih_2$.

Fecha: / /

Luego, veamos qué pasa si calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{C}\\ h\to 0}} \frac{\sqrt{|h_1||h_2|}}{h_1+ih_2} \cdot \frac{(h_1-ih_2)}{(h_1-ih_2)}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{(h_1-ih_2)\sqrt{|h_1||h_2|}}{h_1^2+h_2^2} = (*)$$

Suponiendo que el límite existe, tenemos que para cualquier "aproximación" de h a 0, nos dará el mismo límite. En particular, si h se aproxima a 0 a través de la recta $y=\alpha x$, con $\alpha \geq 0$ arbitrario, podemos escribir $h_1 = t$, $h_2=\alpha t$, con $t>0$. Así:

$$(*) = \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{(t-i\alpha t)\sqrt{|\alpha||t^2|}}{t^2+\alpha^2t^2} = \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{\cancel{t^2}(1-i\alpha)\sqrt{\alpha}}{\cancel{t^2}(1+\alpha^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{(1+i\alpha)}.$$ Este valor varía de acuerdo a la elección de α (que era arbitrario).

$\Rightarrow$ El límite <u>no</u> es único y $\therefore$ no existe.

$\therefore$ la función <u>no</u> es diferenciable en 0.

<u>Obs</u>: Este problema nos hace ver que C-R es una condición necesaria, pero no suficiente para que una función sea diferenciable en un punto.
Se puede demostrar que, si una función $f=u+iv$ cumple C-R en un punto $z\in\mathbb{C}$ y además sus derivadas parciales c/r a x e y (para u y v) son continuas en (x,y) (con $z=x+iy$), entonces f es diferenciable en z y $f'(z) = f_x(z)$.

Fecha: / /

P2

a) $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$\overset{C-R}{=} \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + i\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + i\left(-\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}\right) - \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) = 0.$

$\Leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$

$\Rightarrow$ las partes real e imaginaria son nulas, i.e.:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\therefore$ se cumple C-R

b) $f \in H(\Omega)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ cualquiera.

Por C-R: $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ (1)

$\overset{C-R}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ (2)

$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} 2f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

$\Rightarrow f'(z_0) = \frac{1}{2}(\%) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) - i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

$= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

RHEIN

Fecha: / /

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right)\right.$

$\left. + i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

Por lo tanto, imponer $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ es lo mismo que imponer:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

(Igualamos partes reales e imaginarias a 0, simultáneamente).

d) Como $f \in H(\Omega)$, en particular cumple C-R en todo Ω. ie.:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Fecha: / /

Derivando: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Como u, v son $\mathcal{C}^2$, usando Schwarz (ie, igualando las derivadas cruzadas):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \wedge \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta u = 0 = \Delta v$$

$$\Leftrightarrow \Delta u + i\Delta v = 0 + i0 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \Delta f = 0 \quad \therefore f \text{ es armónica.}$$

Antes de pasar a la P3, recordemos:

- Dada una serie de potencias: $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, definimos su radio de convergencia como:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

y la serie converge en $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$

- Las series de potencia son holomorfas en $D(a,R)$.

RHEIN

Fecha: / /

Criterio del cociente:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tq $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow L$

i) Si $L<1$, la serie es absolutamente convergente

ii) Si $L>1$, la serie es divergente.

iii) Si $L=1$, depende de cada caso.

Criterio de la raíz:

Si $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow L$, entonces se tienen las mismas conclusiones que antes.

P3

a) Usaremos criterio del cociente:

$$\lim_n \frac{(n+1)^2 |z+2|^{2^{n+1}}}{n^2 \, |z+2|^{2^n}} < 1 \iff \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 |z+2|^{2^n} < 1$$

$$\overset{(\ )^{1/2^n}}{\Longrightarrow} \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/2^n} \cdot |z+2| < 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_n \sqrt[2^n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}}\, |z+2| < 1$$

$\Rightarrow \quad 1 \cdot |z+2| < 1$, y como la serie converge

en $D(-2,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| < R\}$, concluimos que el radio de convergencia de la serie es $R=1$.

Fecha: / /

b) Usaremos el criterio de la raíz.

$$\lim_n \left(\frac{3^n n^3 (n!)^3 |z|^{3n}}{(3n)!} \right)^{1/n} < 1$$

Podemos usar la aproximación de Stirling, ya que estamos trabajando con n grande (pues tomaremos $n \to \infty$).

Así, para n grande:

$$\left(\frac{n^3 (n!)^3}{(3n)!} \right)^{1/n} \sim \left(\frac{n^3 \left((2n\pi)^{1/2} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right)^3}{\sqrt{6n\pi} \left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}} \right)^{1/n}$$

$$= \left(\frac{n^3 \cdot n^{3/2} (2\pi)^{3/2}}{\sqrt{3}\, n^{1/2} (2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{\cancel{n^{3n}}}{\cancel{e^{3n}}} \cdot \frac{\cancel{e^{3n}}}{3^{3n} \cancel{n^{3n}}} \right)^{1/n}$$

$$= \left(\frac{n^4}{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{3^{3n}} \right)^{1/n} = \sqrt[n]{n^4} \cdot \sqrt[n]{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \lim_n \left(\frac{3^n n^3 (n!)^3 |z|^{3n}}{(3n)!} \right)^{1/n}$$

$$= \lim_n \sqrt[n]{n^4} \sqrt[n]{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$\Rightarrow$

$$3|z|^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 < 1 \Leftrightarrow |z|^3 < 9 \Leftrightarrow |z| < \sqrt[3]{9}$$

$\therefore$ $R = \sqrt[3]{9}$ es el radio de convergencia de la serie. //

Fecha: / /

P4 Calculemos el radio de convergencia, ya que una serie de potencias es holomorfa en su disco de convergencia.

Escribamos J como serie de potencias:

$$J(z) = \sum_{K=0}^{\infty} a_m (z-z_0)^K$$

Con $z_0 = 0$ y $a_K = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} & \text{si } K = 2m \\ 0 & \sim \end{cases}$

(i.e. agregamos las potencias impares, multiplicadas por 0).

Luego: $\limsup_K \sqrt[K]{|a_K|} = \lim_m \sqrt[2m]{\frac{1}{(m!)^2 2^{2m}}} = \lim_m \frac{1}{2 \sqrt[m]{m!}} = 0$

∴ el radio de convergencia es $R = \frac{1}{0} = \infty$.

Esto es, el disco de convergencia tiene radio infinito, es decir, cubre todo $\mathbb{C}$.

∴ Por lo que se dijo al principio, J es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Como J es holomorfa en $\mathbb{C}$, podemos derivar (esto sólo se puede hacer en el disco de convergencia de una serie de potencias). Recordemos que la derivada de una serie es "la serie de la derivada", cuando esto tenga sentido (es decir, que converja).

Fecha: / /

Así: $J'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m z^{2m}}{(m!)^2 2^{2m}} \right)' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 2m z^{2m-1}}{(m!)^2 2^{2m}}$

$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m z^{2m-1}}{(m!)^2 2^{2m-1}}$. (para $m=0$, la expresión se anula).

$\cdot J''(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m(2m-1) z^{2m-2}}{(m!)^2 2^{2m-1}}$

Calculemos:

$J''(z) + \frac{1}{z} J'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m(2m-1) z^{2m-2}}{(m!) 2^{2m-1}} + \frac{1}{z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m z^{2m-1}}{(m!)^2 2^{2m-1}}$

$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m(2m-1) z^{2m-2}}{(m!)^2 2^{2m-1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m z^{2m-2}}{(m!)^2 2^{2m-1}}$

$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m z^{2m-2}}{(m!)^2 2^{2m-1}} (2m \cancel{-1} + \cancel{1})$

$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m-2}}{(m!)^2 2^{2m-2}} m^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m-2}}{((m-1)!)^2 2^{2m-2}}$

$= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^{2m-2}}{((m-1)!)^2 2^{2m-2}} = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(m!)^2 2^{2m}} = -J(z)$

$\therefore J''(z) + \frac{1}{z} J'(z) + J(z) = 0.$ //

RHEIN