MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 7

25 de Octubre de 2016

P1. Considere la función definida por

$$f(x+iy) = \sqrt{|x||y|}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en el origen, pero no es diferenciable en 0.

P2. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$

d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2, se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω, se dice que f es armónica en Ω. Deduzca que si $f \in H(\Omega)$, entonces f es armónica en Ω.

P3. Estudie el radio de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n^3 (n!)^3}{(3n)!} z^{3n}$

Indicación: Puede serle útil la aproximación de Stirling: $n! \sim \sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n$, donde $\sim$ quiere decir que el cociente de ambos valores tiende a uno cuando $n \to \infty$.

P4. Sea J la función definida mediante la serie de potencias

$$J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

Muestre que J es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y verifique además que es solución de la ecuación

$$w'' + \frac{1}{z}w' + w = 0.$$