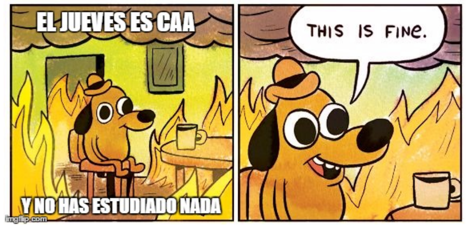

MA2002-1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 6

18 de octubre de 2016

P1. Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\vec{r}(x,\rho,\theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

con $x \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$ y $\rho \geq 0$.

(a) Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\theta}$. Son ortogonales? Calcule $\hat{\theta} \times \hat{x}$ y $\hat{\theta} \times \hat{\rho}$.

(b) Encuentre expresiones para el gradiente, divergencia, laplaciano y rotor en este sistema de coordenadas.

(c) Dada una función no negativa y diferenciable $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r_1}(x, \theta) = x\hat{\imath} + f(x)\hat{\rho}$.

P2. Considere el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado en coordenadas cartesianas por

$$\vec{F}(x,y,z) = (x(\sqrt{x^2+y^2} - b), y(\sqrt{x^2+y^2} - b), z\sqrt{x^2+y^2}).$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ el volumen de revolución que se obtiene al rotar con respecto al eje Z el rectángulo del plano YZ dado por $a \leq y \leq b$ y $-H \leq z \leq H$.

a) Escriba el campo $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas.

b) Calcule la divergencia de $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas.

c) Calcule $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\vec{F} dV$.

d) Calcule, usando la definición, el flujo de $\vec{F}$ que sale a través de $\partial\Omega$, borde de Ω(oriente la normal hacia el exterior de Ω).

P3. a) Sea γ una curva simple suave por tramos y cerrada en $\mathbb{R}^2$ y sea D la región interior a γ. Demuestre que el área de D es igual a $\displaystyle\int_\gamma ydx + 2xdy = A(D)$.

b) Usan la expresión anterior calcule el área de la región interior a la elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y limitada por $x \leq 1$.

c) Sea $F(x,y,z) = (x^2 - 3y^2, z^2 + y, x + 2z^2)$. Sea además γ la curva qye se obtiene como intersección de el plano $x - 2y + z = 5$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ recorrida en sentido antihorario. Calcule, usando el Teorema de Stokes, la integral de trabajo de F a lo largo de la curva γ.

P4. Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

a) Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ.

b) Sea $\vec{G} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $\nabla \times \vec{G} = 0$, para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el teorema de Stokes.