

Solución Auxiliar 5P11a) Primero, calculemos $\nabla \times (f \nabla g)$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (f \nabla g) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} & f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} & f \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}) \right) \hat{x} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}) \right) \hat{y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}) \right) \hat{z} \end{aligned}$$

Vamos a calcular por coordenadas:

$$\begin{aligned} \text{En } \hat{x}: \quad & \frac{\partial}{\partial y} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ & - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \quad (\text{Usando teo. Schwarz, pues } g \in C^2) \\ & = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

Notando que pasará lo mismo (ie., que las segundas derivadas de g) se anularán en $\hat{y}$ y $\hat{z}$, tenemos que:

$$\text{En } \hat{y}: \quad \frac{\partial}{\partial z} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\text{En } \hat{z}: \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\text{Así, } \nabla \times (f \nabla g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (*)$$

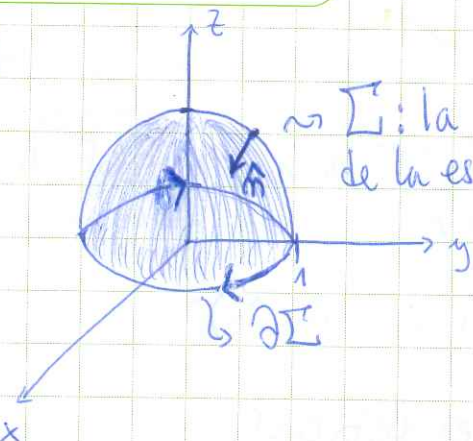
Calculemos ahora $\nabla f \times \nabla g$:

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \nabla \times (f \nabla g) //$$

b)



~ Σ : la superficie de la mitad superior de la esfera de radio 1 (sin incluir la "tapa").

$$\text{Luego: } \iint_{\Sigma} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dS \stackrel{(a)}{=} \iint_{\Sigma} \nabla \times (f \nabla g) \cdot \hat{n} dS$$

Stokes

$$= \oint_{\partial \Sigma} f \nabla g d\vec{r} \quad (*)$$

Notemos que $f = x^2 + y^2 = 1$ en $\partial \Sigma$ (pues $\partial \Sigma$ es la circunferencia de radio 1).

Además, definiendo $G = \nabla g$, es claro (por definición) que G es conservativo, y así: $\oint_{\Gamma} G \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva Γ cerrada y regular por pedazos.

$$\text{Por lo tanto: } (*) = \oint_{\partial \Sigma} f \nabla g d\vec{r} = \oint_{\partial \Sigma} 1 \cdot G d\vec{r} = 0, \text{ tomando } \Gamma = \partial \Sigma$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dS = 0.$$

P2/a) Recordemos que:

$$\operatorname{div}(F) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (F_w h_u h_v) \right)$$

Para cualquier triedro ortogonal $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$.

Como estamos en coordenadas esféricas:

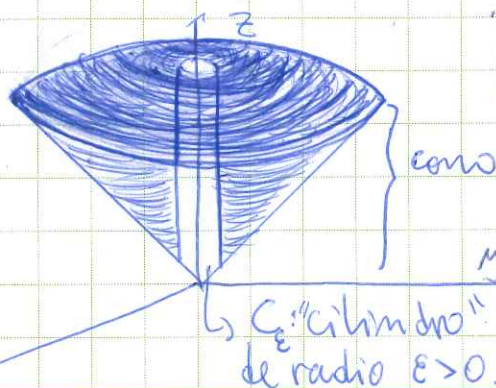
$$h_r = 1, \quad h_\theta = r \sin(\varphi), \quad h_\varphi = r.$$

(En este caso, φ es el que "cae" y θ barre el plano xy).

$$\begin{aligned} \text{An: } \operatorname{div}(F) &= \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot r^2 \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot r \sin^3(\varphi)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} (0 \cdot r \sin(\varphi)) \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \left(4r^3 \sin(\varphi) + r^2 \sin^3(\varphi) \right) \\ &= 4r + \sin^2(\varphi) // \end{aligned}$$

b) Dado $\varepsilon > 0$, la región Ω_ε no es otra cosa que la región $\Omega \setminus C_\varepsilon$, donde C_ε es el cilindro centrado en el eje z y de radio ε .

Parte del casca-
no esférico



Obs: En la punta del cono la superficie no es orientable (por eso es necesario tomar el cilindro).

Fecha: / /

Calculamos el flujo en las distintas superficies de la región:

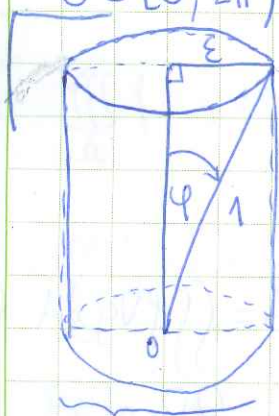
• Manto del cono: Notemos que $\hat{n} = \hat{\varphi}$

Luego: $F \cdot \hat{\varphi} = 0 \Rightarrow$ el flujo es 0 en esta superficie.

• Tapa esférica: Notemos que $\hat{n} = \hat{r}$. Luego, parametrizando:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi))$$

$\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [\arcsen(\varepsilon), \pi/4]$, pues:



$$\sin(\varphi) = \frac{\varepsilon}{1} \Rightarrow \varphi = \arcsen(\varepsilon)$$

(caso φ mínimo)

y además, el caso máximo ocurre cuando $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$C_\varepsilon \Rightarrow x \cos(\varphi) = \sqrt{x^2 \sin^2(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \sin(\varphi) \Rightarrow \varphi = \pi/4$$

Así, el flujo en esta parte es:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\arcsen(\varepsilon)}^{\pi/4} (F(r(\theta, \varphi))) \cdot \hat{r} \cdot 1^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\arcsen(\varepsilon)}^{\pi/4} 1^2 \cdot 1^2 \sin(\varphi) d\theta \cdot d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\cos(\varphi) \right]_{\arcsen(\varepsilon)}^{\pi/4} d\theta$$

$$= 2\pi (\cos(\arcsen(\varepsilon)) - \cos(\pi/4)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Mano cilíndrico de C_ε :

desigualdad $\Delta' r$

$$\text{Notemos: } 0 \leq \left| \iint_{C_\varepsilon} F \cdot d\vec{A} \right| \leq \iint_{C_\varepsilon} \|F\| dA \leq \iint_{C_\varepsilon} M dA$$

$$= M \cdot \text{Vol}(C_\varepsilon) = M \cdot \pi \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \text{ con } M \in \mathbb{R} (\text{pues } F \text{ es acotada}).$$

Así, el flujo tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{Así: } I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial \Omega_\varepsilon} F \cdot d\vec{A} = 0 + 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 \\ &= \pi(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

P3

$$a) \text{ Tenemos que: } \iint_{\partial \Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial n} dA = \iint_{\partial \Omega} f \nabla g \cdot \hat{n} dA = \iint_{\partial \Omega} f \nabla g d\vec{A} \quad (*)$$

La idea es usar teo. Gauss sobre $f \nabla g$.

Calculemos $\text{div}(f \nabla g)$:

$$\text{Notemos que } \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

y sus análogos para y, z .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{div}(f \nabla g) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &\quad + f \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) \\ &= \nabla f \cdot \nabla g + f \cdot \Delta g \end{aligned}$$

Así, por teo Gauss:

$$\iint_{\partial\Omega} f \nabla g \, d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(f \nabla g) \, dV = \iiint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g) \, dV$$

(*) $f \frac{\partial g}{\partial n} \hat{n} \, dA$

$$\therefore \iiint_{\Omega} f \Delta g \, dV = \iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot d\vec{A} - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV //$$

b) Usando la fórmula anterior, cambiando los roles de f y g (que se puede pues ambas son ℓ^2 en este caso):

$$\iiint_{\Omega} f \Delta g \, dV = \iint_{\partial\Omega} f \nabla g \, d\vec{A} - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV \quad (1)$$

$$\iiint_{\Omega} g \Delta f \, dV = \iint_{\partial\Omega} g \nabla f \, d\vec{A} - \iiint_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla f \, dV \quad (2)$$

Restando (1) - (2):

$$\iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dV = \iint_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\vec{A} //$$

c) Como $h \in \ell^2$ es solución, $-\Delta h + h^3 = 0$ en Ω
 $h = 0$ en $\partial\Omega$.

$\Rightarrow$ Multiplicando por h :

$$-h \Delta h + h^4 = 0 \quad / \quad \iiint_{\Omega} dV$$

$$\Rightarrow - \iiint_{\Omega} h \Delta h \, dV + \iiint_{\Omega} h^4 \, dV = 0 \quad (*)$$

Usando la primera fórmula de Green, para $f = h = g$:

$$\iiint_{\Omega} h \Delta h \, dV = \underbrace{\iint_{\partial\Omega} h \nabla h \cdot d\vec{A}}_0 - \iiint_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h \, dV.$$

0, pues $h=0$ en $\partial\Omega$.

Notemos que $\nabla h \cdot \nabla h = \|\nabla h\|^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\iiint_{\Omega} h \Delta h \, dV}_{\|(\ast)\|} = - \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dV.$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} h^4 \, dV = - \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dV.$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} h^4 \, dV + \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dV = 0.$$

Como ambos términos son no negativos, entonces, necesariamente ambos son 0, y en particular,

$$\|\nabla h\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla h = 0 \Rightarrow h \text{ es constante en } \Omega.$$

$\hookrightarrow (h \in C^2, \Omega \text{ conexo})$

Como sabemos que $h=0$ en $\partial\Omega$, y que es constante en Ω

$$\Rightarrow h \equiv 0 \text{ en } \Omega //$$