MA2002-1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 3

04 de octubre de 2016

1. Resumen

Teorema 1 (Stokes)**.** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientable y regular por pedazos, con borde ∂S una curva cerrada, siemple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Sea finalmente $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal $\hat{n}$. Entonces:* $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA.$

Teorema 2 (Teorema de Green en el Plano)**.** $\oint_{\partial S} Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy.$

Definición 1 (campo Conservativo)**.** Un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es conservativo sobre Ω si deriva de un potencial $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en el sentido que $\vec{F} = \nabla g$.

Proposición 1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(I) *El campo $\vec{F}$ es conservativo en Ω*

(II) *Para toda curva $\Gamma \subset \Omega$ cerrada y regular por pedazos se tiene*

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

(III) $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, *para todo par de curvas regulares Γ_1, Γ_2 con iguales puntos inicial y final.*

2. Problemas

P1. (a) Verifique que $F(\vec{r}) = (y^2 \cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2y \operatorname{sen}(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$ es un campo conservativo.

(b) Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde $G(\vec{r}) = (y^2 \cos(x) + 2z^3)\hat{\imath} + (2y \operatorname{sen}(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$, con Γ la curva que consta del arco $y = x^2$ del origen al punto $(1, 0, 0)$ en $z = 0$ junto con el segmento recto $(1, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$.

(c) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$ y $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase $\mathcal{C}^1$ tales que $F(\vec{r}) = G(\vec{r})$, $\forall \vec{r} \in S$. Usando la definición del rotor con límites, muestre que $(\nabla \times \vec{F})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = (\nabla \times \vec{G})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})$, $\forall \vec{r} \in S$.

P2. Sea $u : B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en la bola abierta centrada en el origen $B(0, R)$ donde $R > 0$. Suponga que u satisface $\Delta u = 0$ (es decir, u es armónica) en $B(0, R)$.

I) Demuestre que el campo $\vec{F} = \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\jmath}$ es conservativo en $B(0, R)$.

II) Concluya que existe $v : B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica en $B(0, R)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$