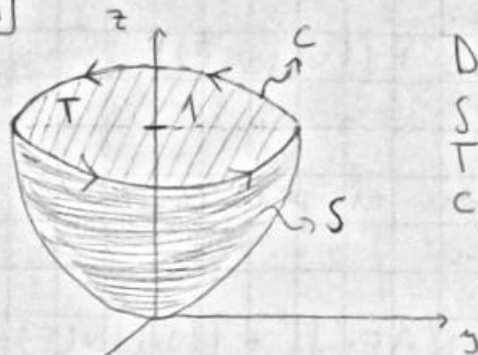


Fecha: / /

Solución Auxiliar 3

P1)



D: Interior del paraboloid.
S: Superficie del paraboloid
T: "Tapa" superior del paraboloid
C: Frontera de T.

a) Aplicando el Teorema de Stokes, tenemos que:

$$\iint_S \text{rot}(\text{rot}(F)) \cdot d\vec{S} = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r}$$

Usando la indicación: $\text{rot}(\text{rot}(F)) = \nabla(\text{div}(F)) - \Delta F$
Ah:

$$\iint_S \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S} - \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \iint_S \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S} = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} //$$

b) Aplicando el Teorema de Gauss, tenemos que:

$$\iiint_D \Delta(\text{div}(F)) dV = \iiint_D \text{div}(\nabla(\text{div}(F))) dV = \iint_S \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S}$$

$$+ \iint_T \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S} \quad \text{(OJO con incluir la tapa, ya que así "cerramos" la región)}$$

Fecha: / /

c) Por la parte (b)

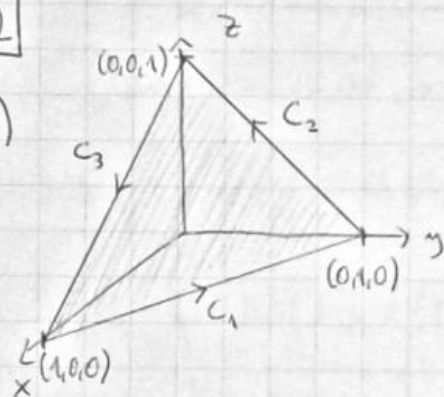
$$\iiint_D \Delta(\operatorname{div}(F)) dV = \iint_S \nabla(\operatorname{div}(F)) \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(\operatorname{div}(F)) \cdot d\vec{S}$$

y usando la parte (a) para el primer término del lado derecho:

$$\iiint_D \Delta(\operatorname{div}(F)) dV = \oint_C \operatorname{rot}(F) \cdot d\vec{F} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(\operatorname{div}(F)) \cdot d\vec{S} //$$

P2

a)



$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

• Calculamos $\oint_C F \cdot d\vec{F}$. Notemos que $\int_{C_1} F \cdot d\vec{F} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{F} + \int_{C_3} F \cdot d\vec{F} = \oint_C F \cdot d\vec{F}$

En C_1 : Una parametrización de este segmento está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= \text{partida} + t(\text{llegada} - \text{partida}), t \in [0,1] \\ &= (1,0,0) + t((0,1,0) - (1,0,0)) \\ &= (1-t, t, 0) \\ \Rightarrow \vec{F}'(t) &= (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } F(\vec{F}(t)) &= ((1-t)^2 - t^2, t^2, -(1-t)^2) \\ &= (1-2t, t^2, -(1-t)^2) \end{aligned}$$

Fecha: / /

$$\Rightarrow F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ t^2 \\ -(1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t^2 + 2t - 1$$

Así:

$$\int_{C_1} F \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 (t^2 + 2t - 1) dt$$

$$= \left. \frac{t^3}{3} + t^2 - t \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

En C_2 : Con el mismo razonamiento, $\vec{r}(t) = (0, 1-t, t)$

$$\Rightarrow F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -(1-t)^2 \\ 1-2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t^2 + 2t - 1$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} F \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2 + 2t - 1) dt = \frac{1}{3}$$

Y de igual forma, $\int_{C_3} F \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3}$ (Por "simetría" de F).

$$\therefore \oint_C F \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} F \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} F \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 //$$

Ahora, calculemos $\iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S}$. Usando la ecuación $z = 1 - x - y$,

tenemos que la superficie S es el grafo de dicha ec. sobre $T = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$ en el primer cuadrante del plano xy . Así, podemos parametrizarlo como $\vec{r}(x, y) = (x, y, 1-x-y)$, $\forall (x, y) \in T$.

Luego, calculemos $\text{rot}(F)$:

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 - y^2 & y^2 - z^2 & z^2 - x^2 \end{vmatrix} = (2z, 2x, 2y)$$

Fecha: / /

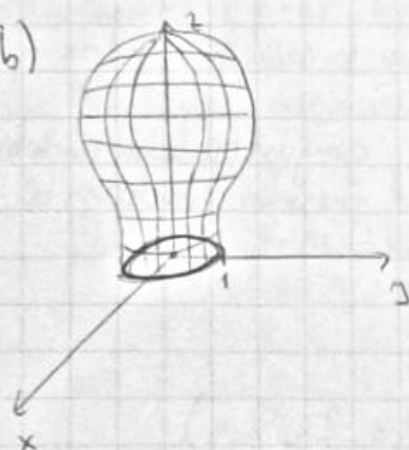
Notemos ahora que: $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = (1, 0, -1)$ y $\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = (0, 1, -1)$

Además, $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_T (2z, 2x, 2y) \cdot (1, 1, 1) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2(1-x-y), 2x, 2y) \cdot (1, 1, 1) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2-2x-2y + 2x + 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2 dy dx = \int_0^1 2(1-x) dx = 2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 2 \left(0 - \frac{0^2}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Así, verificamos el teorema para este caso. //

b)



Usaremos Stokes para calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en lugar de $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$,

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 1$

Parametrizamos C:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$\wedge \vec{F}(\vec{r}(t)) = (\cos(t), \sin(t)+1, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t)+1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(t)$$

Así por Stokes: $\iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S} = \oint_C F \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = 0$ ✓

P3

a) Calculamos:

$$\text{rot}(G) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & -xz & xy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -2z \end{pmatrix} = F //$$

Stokes

b) Queremos calcular: $\iint_S F \cdot d\vec{S} \stackrel{ca)}{=} \iint_S \text{rot}(G) \cdot d\vec{S} \stackrel{St}{=} \oint_{\partial S} G \cdot d\vec{r}$

Donde ∂S es la circunferencia ecuatorial de S .

Notemos que $S = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$
 $\Rightarrow \partial S = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4, z = 0\}$
 $= \{(x, y, 0) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4\}$

Así podemos parametrizar ∂S como:

$$\vec{r}(t) = (1 + 2\cos(t), 1 + 2\sin(t), 0), t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 0)$$

$$\wedge G(\vec{r}(t)) = (0, 0, (1+2\cos(t))(1+2\sin(t)))$$

$$\Rightarrow G(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

$\therefore$ El flujo es $\iint_S F \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} G \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} G(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$

c) Para usar Gauss, debemos cerrar la superficie trabajada, es decir, debemos considerar el círculo $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$.
 Consideremos $D = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.
 Luego, por los Gauss:

$$\iiint_D \text{div}(F) dV = \iint_{\partial D} F \cdot d\vec{S} = \iint_S F \cdot d\vec{S} + \iint_T F \cdot d\vec{S} \quad \text{con } T: \text{"tapa"}.$$

Fecha: / /

Además, por la parte (a), sabemos que $F = \text{rot}(G)$,
 $\Rightarrow \text{div}(F) = \text{div}(\text{rot}(G)) = 0$, pues los rotors son
solenoides.

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot d\vec{S} = - \iint_T F \cdot d\vec{S}$$

Calculemos la integral de la derecha. Notemos
que $\hat{n} = -\hat{z}$ (pues está orientada hacia afuera).

y, al tratarse de coordenadas cilíndricas
brasiladas, $dS = \rho d\rho d\varphi$. Notemos además
que la tapa se parametriza como:

$$\vec{r}(\rho, \varphi) = (1 + \rho \cos(\varphi), 1 + \rho \sin(\varphi), 0), \quad \rho \in [0, 2], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Así, concluimos que:

$$\iint_T F \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2(1 + \rho \cos(\varphi)), 0, 0) \cdot (0, 0, -1) \rho d\rho d\varphi$$

$= 0$, con lo que se concluye, al
igual que en (b), que $\iint_S F \cdot d\vec{S} = 0$.