MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 3: Teoremas Integrales

27 de Septiembre de 2016

P1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^3 y considere:

$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z < 1\}$

$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z, z \leqslant 1\}$ orientada exteriormente

$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 1\}$ orientada hacia arriba

$C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ orientado de forma antihoraria (visto desde arriba)

a) Demuestre que

$$\iint_S \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S} = \oint_C rot(F) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S}$$

Indicación: Puede serle útil la identidad $\Delta F = \nabla(div(F)) - rot(rot(F))$

b) Demuestre que

$$\iiint_D \Delta(div(F))dV = \iint_S \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S}$$

c) Concluya que

$$\iiint_D \Delta(div(F))dV = \oint_C rot(F) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S}$$

P2. *a*) Sea S la superficie dada por el plano $x + y + z = 1$ en el primer octante, orientada hacia arriba y sea C su frontera, orientada en sentido antihorario (vista desde arriba). Considere el campo $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$. Verifique el teorema de Stokes para este campo.

b) Suponga que S es una región descrita como sigue: Imagine una ampolleta con la base cortada, de manera que su frontera es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, con la normal apuntando hacia afuera. Considere el siguiente campo vectorial:

$$F(x, y, z) = (e^{z^2-2z}x, sen(xyz) + y + 1, e^{z^2}sen(z^2))$$

Calcule $\iint_S rot(F) \cdot d\vec{S}$

P3. Sea S el hemisferio superior del casquete esférico centrado en (1,1,0) y de radio 2. Considere el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (2x, 0, -2z)$$

a) Considere el campo $G(x, y, z) = (yz, -xz, xy)$. Muestre que $rot(G) = F$

b) Calcule el flujo de F a través de S, orientada según la normal exterior.

c) Usando el Teorema de Gauss, confirme su cálculo para el flujo indicado en la parte (b).