MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau, Sebastián Urzúa

Auxiliar 1: Elementos del Cálculo Vectorial

13 de Septiembre de 2016

P1. A partir de las coordenadas cilíndricas:

a) Calcule los factores escalares correspondientes (h_ρ, h_φ, h_z).

b) Calcule los vectores unitarios $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{z}$. Verifique que son ortogonales y encuentre el orden positivo.

c) Sea $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2}cos(arctan(\frac{y}{x})) - arctan(\frac{y}{x})sen(arctan(\frac{y}{x})) \\ \sqrt{x^2+y^2}sen(arctan(\frac{y}{x})) + arctan(\frac{y}{x})cos(arctan(\frac{y}{x})) \\ z \end{pmatrix}$

Calcule $div(F)$ y $rot(F)$.

d) Sea G un campo vectorial, suficientemente diferenciable. Pruebe la siguiente identidad:

$$\Delta G = \nabla(div(G)) - rot(rot(G))$$

P2. *a*) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1. Demuestre que

$$\nabla \times (\int_a^b \varphi(\vec{r},t)dt) = \int_a^b (\nabla \times \varphi(\vec{r},t))dt$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $[\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b \varphi(\vec{r},t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\vec{r},t)dt]$, donde $\vec{r} = (x,y,z)$ y u representa cualquier variable cartesiana.

b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $div(\vec{F}) = 0$ y pruebe que

$$rot[\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2\frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}) \tag{1}$$

c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $div(\vec{F}) = 0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar (no se le pide que lo haga) que la ecuación (1) es válida en B. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}]dt$. Usando lo anterior, concluya que $rot(\vec{G}) = \vec{F}$ en B.

P3. Propuesto

a) Obtenga los factores escalares para las coordenadas parabólicas (ε, ν, ϕ), que se relacionan con las coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$x = \varepsilon\nu cos(\phi) \quad y = \varepsilon\nu sen(\phi) \quad z = \frac{1}{2}(\nu^2 - \varepsilon^2)$$

Calcule el elemento de volumen.

b) Proceda de manera análoga a la parte anterior para el siguiente cambio de coordenadas:

$$x = asenh(\mu)sen(\nu)cos(\phi) \quad y = asenh(\mu)sen(\nu)sen(\phi) \quad z = acosh(\mu)cos(\nu)$$