MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares: Esteban Quiroz - Eduardo Silva
Obed Ulloa - Donato Vásquez
Fecha: 25 de octubre de 2016.

Pauta Auxiliar 8

Recuerdo:

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados.

- **Definición 1:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **continua en $\mathbf{x_0}$** $\in D$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in D : \|x - x_0\|_X \leq \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \varepsilon$
- **Definición 2:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **continua** si es continua en todo $x \in D$.
- **Definición 3:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **uniformemente continua** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x_1, x_2 \in D : \|x_1 - x_2\|_X \leq \delta \implies \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon$
- **Definición 4:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **Lipschitz de constante K** si $\forall x_1, x_2 \in D : \|f(x_1) - f(x_2)\|_X \leq K \|x_1 - x_2\|_Y$
- **Propiedad 1:** Si f es Lipschitz, entonces f es uniformemente continua.
- **Definición 5:** Sea $f : D \subseteq X \to X$. Diremos que x_0 es **punto fijo** de f si $f(x_0) = x_0$
- **Definición 6:** Una función se dice **contractante** si es Lipschitz de constante $K \in (0, 1)$
- **Teorema 1 (Punto fijo de Banach):** Si X un espacio de Banach y $f : X \to X$ una función contractante, entonces f tiene un único punto fijo.

P1. [Propiedades de las funciones continuas]
Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $f : D \subseteq X \to Y$. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Si para todo conjunto abierto $V \subseteq Y$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(V) = U \cap D$, entonces f es continua.

b) Si $K \subseteq D$ es compacto y f es continua, entonces $f(K)$ es un conjunto compacto. Use lo anterior para concluir que si $Y = \mathbb{R}$, entonces f alcanza su mínimo y su máximo.

c) Si D es un conjunto compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua.

Solución:
a) Dado $x \in D$ y $\varepsilon > 0$, luego, la bola abierta $B(f(x), \varepsilon)$ será un subconjunto abierto de X, así, por hipótesis, existirá un abierto $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) = U \cap D$. Luego, x es un punto de U y al ser U abierto, existe un $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq U$. Luego, $f(B(x, \delta) \cap D) \subseteq f(U \cap D) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Es decir, si y es tal que $\|x - y\| \leq \delta$, tendremos que $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. Como esto es para todo x y para todo ε, concluimos que f es continua.
b) Queremos ver que $f(K)$ es un conjunto compacto, para esto, basta ver que cualquier sucesión en $f(K)$ tiene subsucesión convergente. Para esto, sea $\{y_k\}$ una sucesión en $f(K)$, para cada k, existe $x_k \in C$ tal que $f(x_k) = y_k$. Como C es compacto, además, existe una subsucesión $x_{\phi(k)}$ de x_k que converge a un límite x, pero como f es continua, el límite de $f(x_{\phi(k)})$ será $f(x)$. Luego, $y_{\phi(k)} = f(x_{\phi(k)})$ es una subsucesión convergente de

y_k y podemos concluir que $f(K)$ es compacto.

c) Lo haremos por contradicción, supongamos que f no es uniformemente continua, entonces existe $\varepsilon > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, existirá un par (x_k, y_k) tal que

$$\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k} \qquad\qquad \|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon$$

Luego, podemos tomar sucesiones x_k e y_k a partir de esos pares, como estas sucesiones están contenidas en el compacto D, ambas tienen al menos una subsucesión convergente. Luego, existe $x_{\phi(n)} \to x$ e $y_{\varphi(n)} \to y$, como ϕ y φ son crecientes, se mantendrá la desigualdad de la sucesión con las subsucesiones, es decir, $\left\|x_{\phi(n)} - y_{\varphi(n)}\right\| < \frac{1}{n}$ Esto nos dice que el límite debe ser el mismo, luego, $\lim f(x_{\phi(n)}) = \lim f(y_{\varphi(n)})$, lo que contradice la segunda desigualdad. Concluimos entonces que f es uniformemente continua.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2} ln(\frac{1}{x^2+y^2}) - 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demuestre que f es una función continua.
b) Muestre que el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : 50x^2y^2 ln(x^2+y^2) > x^2+y^2\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$
c) Se define $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0\}$. Muestre que K es no vacío y cerrado. Pruebe además que f alcanza su máximo en R^2

Solución:
a) Notemos que f es continua en $\mathbb{R}^2\{0,0\}$ por álgebra y composición de funciones continuas, por lo que sólo nos falta mostrar la continuidad en $(0,0)$, para eso, notemos que si $(x,y) \neq (0,0)$

$$0 \leq \left|\frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = \left|\frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \leq \frac{50}{4}(x^2+y^2)\ln\left(x^2+y^2\right) = \frac{50}{4}r^2\ln\left(r^2\right)$$

Dodne para la segunda desigualdad se usó que $2|ab| \leq a^2 + b^2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, en la última igualdad se usó un cambio a coordenadas polares.
Luego, sólo basta notar que

$$\lim_{r\to 0} r^2\ln\left(r^2\right) = \lim_{r\to 0} \frac{\ln\left(r^2\right)}{\frac{1}{r^2}} \underbrace{=}_{L'hop} \lim_{r\to 0} \frac{\frac{2}{r}}{\frac{-2}{r^3}} = 0$$

Así, por teorema del Sandwich, concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

Pero este es el límite de $f+1$. Luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1 = f(0,0)$, condluyéndose la continuidad de f en $(0,0)$ y por tanto, en todo $\mathbb{R}^2$

b) Como f es continua, preimágenes de conjuntos abiertos por f también serán abiertos, ésta será la estrategia que usaremos para demostrar que A es abierto. En efecto,

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(x^2+y^2\right) > 1\} \\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) < -1\} \\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 1 < -2\} \\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) < -2\} \\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) \in (-\infty,2)\} \\
&= f^{-1}\left((-\infty,2)\right)
\end{aligned}$$

Como $(-\infty,2)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y f es continua, se concluye que A es un conjunto abierto.

c) Para ver que K es no vacío basta notar que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in K$, en efecto,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{50\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right) = \frac{50}{4}\ln(1) = 0$$

Para ver que K es cerrado, basta notar que $K = f^{-1}([0,\infty))$, luego, como $[0,\infty)$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y f es continua, tenemos que K es cerrado.
Para ver que f alcanza su máximo, notemos que si $\bar{x}\in K$, entonces $f(\bar{x}) > f(x)$ $\forall x\notin K$ (por la definición de K. Luego, sólo basta ver que f alcanza su máximo en K. Para esto, nos bastaría ver que K es compacto, como $K\subseteq\mathbb{R}^2$ (dim. finita) y es cerrado, sólo nos basta ver que es acotado para poder concluir. Para eso, veremos que está en una bola de norma $\|\cdot\|_2$
En efecto, notemos que si $x^2+y^2>1$, es decir, $\|(x,y)\|_2 > 1$ tenemos

$$f(x,y) = \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 1 = -\underbrace{\frac{50x^2y^2}{x^2+y^2}}_{>0}\underbrace{\ln\left(x^2+y^2\right)}_{>0} - 1 < 0$$

Luego, si $r>1$, $K\subseteq B_{\|\cdot\|_2}(0,r)$, como K era cerrado, concluimos que es compacto. Como además f es continua, sabemos que alcanza su mínimo en K y por lo ya mencionado, concluimos que f alcanza su máximo.

P3. El objetivo de este problema es demostrar que la **Ecuación Integral de Fredholm**

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s) \qquad \text{para } s\in[a,b]$$

posee una solución $x(\cdot)\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, bajo las siguientes hipótesis:

- Las funciones $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $k:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ son continuas con la norma $\|\cdot\|_\infty$
- Se cumple la siguiente desigualdad

$$\lambda := \max_{a\le s\le b}\int_a^b |k(s,t)|dt < 1$$

Además puede usar como conocido que $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.
Para demostrar esta propiedad, se le sugiere proceder de la siguiente manera:
a) Sea $A:(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)\to(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ la aplicación definida por:

$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)dt + y(s)$$

Note que la ecuación integral de Fredholm equivale a que $Ax = x$, por lo tanto se busca un punto fijo para A.

i) Pruebe la existencia de tal punto fijo.

ii) Sea $x_0 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, demuestre que la sucesión $A^n x_0$ converge al punto fijo de A en $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

b) Es claro que la solución encontrada anteriormente depende de la función y. Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ y $x_1, x_2 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ las dos soluciones asociadas. Muestre que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|Ax_1 - Ax_2\|_\infty \leq \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty$$

Deduzca de lo anterior que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{1-\lambda} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

Y que por lo tanto la solución x del problema depende continuamente de la función y, es decir, la asignación $y \to x(y)$ que recibe la función y y entrega la solución asociada a ella, es continua.

Solución:

a) i) Es fácil notar que $Ax \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ para todo $x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, luego, como vimos que este espacio con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es Banach, para demostrar la existencia de este punto fijo nos basta usar el teorema de punto fijo de Banach. Veamos que A es contractante con esta norma.

$$\begin{aligned}
\|Ax_1 - Ax_2\|_\infty &= \left\| \left(\int_a^b k(\cdot,t) x_1(t) dt + y(\cdot) \right) - \left(\int_a^b k(\cdot,t) x_2(t) dt + y(\cdot) \right) \right\|_\infty \\
&= \left\| \int_a^b k(\cdot,t)(x_1(t) - x_2(t)) dt \right\|_\infty \\
&= \sup_{s\in[a,b]} \left| \int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t)) dt \right| \\
&\leq \sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)| \cdot |x_1(t) - x_2(t)| dt \\
&\leq \sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)| \, \|x_1 - x_2\|_\infty \, dt \\
&= \lambda \cdot \|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Como $\lambda < 1$, se tiene que el operador es contractante, luego, gracias al Teorema de Punto Fijo de Banach, se tiene que A tiene un único punto fijo.

ii) Sea $x_0 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ un elemento cualquiera y sea $\bar{x}$ el punto fijo de A.
Notemos que $\|A^n x_0 - \bar{x}\|_\infty = \|A(A^{n-1}x_0) - A\bar{x}\|_\infty \leq \lambda \|A^{n-1}x_0 - \bar{x}\|_\infty$ (se usó que $\bar{x} = A\bar{x}$ por ser punto fijo).
Repitiendo el proceso anterior llegaremos a que $\|A^n x_0 - \bar{x}\|_\infty \leq \lambda^n \|x_0 - \bar{x}\|_\infty$, como $\|x_0 - \bar{x}\|_\infty$ es fijo y $\lambda < 1$, se tiene que en el límite se va a tener $\lambda^n \to 0$ y por tanto, $\|A^n x_0 - \bar{x}\|_\infty \to 0$. Con esto se prueba la convergencia.

b) Notemos

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|_\infty &= \|A_1 x_1 - A_2 x_2\|_\infty \\
&= \left\| \left(\int_a^b k(\cdot,t) x_1(t) dt + y_1(\cdot) \right) - \left(\int_a^b k(\cdot,t) x_2(t) dt + y_2(\cdot) \right) \right\|_\infty \\
&= \left\| \int_a^b k(\cdot,t)(x_1(t) - x_2(t)) dt \right\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Pero el primer término ya lo acotamos en la parte **a) i)**, luego, concluimos $\|x_1 - x_2\|_\infty \leq \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty - \|y_1 - y_2\|_\infty$
Como $0 < \lambda < 1$, podemos despejar y obtener

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

Concluyéndose lo pedido.