MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares: Esteban Quiroz - Eduardo Silva
Obed Ulloa - Donato Vásquez
Fecha: 13 de septiembre de 2016.

Pauta Auxiliar 2

Definición 1: Sea M un conjunto y $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que d es una **métrica** si satisface:

- $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in M$
- $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in M$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x, y \in M$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si d es una métrica, al par (M, d) se le llama **espacio métrico**.

Definición 2: Sea E un espacio vectorial y $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ una función. Se dirá que esta función es una **norma** si cumple las siguientes propiedades.

- $\|x\| = 0 \implies x = 0, \ \forall x \in E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (Desigualdad Triangular)

En este caso, denotaremos la distancia entre dos elementos $x, y \in E$ como $d(x, y) = \|x - y\|$

Definición 3: Dos normas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ definidas en un mismo e.v. E se dirán **equivalentes** si existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$\| \cdot \|_2 \leq c_1 \| \cdot \|_1, \qquad \| \cdot \|_1 \leq c_2 \| \cdot \|_2$$

Definición 4: Cuando $E = \mathbb{R}^n$, denotaremos:

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ donde $p \geq 1$
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$

P1. Sea (M, d) un espacio métrico, verifique que las siguientes también son métricas.

- $\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$
- $\beta(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$
- $\gamma(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$

Solución: En todas las funciones propuestas las tres primeras propiedades se tienen trivialmente dado que d es métrica. Veamos la desigualdad triangular:
$\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \leq \sqrt{d(x, z) + d(z, y)} \leq \sqrt{d(x, z)} + \sqrt{d(z, y)} = \alpha(x, z) + \alpha(z, y)$
Se concluye que $\alpha(\cdot, \cdot)$ es métrica. (Se usó que $\forall x, y \geq 0, \sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$)

Primero notemos que si $a, b, c \geq 0$ y $c \leq a + b$, entonces $c + ca + cb \leq a + b + ca + cb$, luego, $c(1+a+b) \leq (1+c)(a+b)$ y esto implica que $\frac{c}{1+c} \leq \frac{a+b}{1+a+b}$. Usaremos esto con $c = d(x,y),\ a = d(x,z),\ b = d(z,y)$ (Se tiene $c \leq a+b$ pues d es métrica)
Luego, $\beta(x,y) = \frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \beta(x,z) + \beta(z,y)$. Se concluye que $\beta(\cdot,\cdot)$ es métrica.

$\gamma(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \leq \min\{1, d(x,z)+d(z,y)\} \leq \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(z,y)\} = \gamma(x,z) + \gamma(z,y)$
Para la desigualdad con el mínimo hay que ponerse en casos, si $d(x,z) + d(z,y) \leq 1$, se tiene igualdad. Y si $d(x,z)+d(z,y) > 1$, es claro que la suma de los mínimos puede valer $\{2, 1+d(x,z), 1+d(z,y), d(x,z)+d(z,y)\}$, todos los cuales son mayores que 1.
Se concluye que $\gamma(\cdot,\cdot)$ es métrica.

P2. El objetivo de este problema es ver la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^n$, para esto, se le pide proceder de la siguiente manera:

a) Demuestre el siguiente resultado conocido como **Desigualdad de Hölder**. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in [1, +\infty]$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \|y\|_q$$

Hint: Puede usar que para todo $a, b > 0$, se tiene que $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

b) Pruebe que para $\|\cdot\|_p$ es una norma.

Propuesto: Pruebe que $\|\cdot\|_\infty$ también es una norma.

c) Para $p \in [1, \infty)$ fijo, pruebe que las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

d) Concluya que para todo $p_1, p_2 \in [1, \infty)$, las normas $\|\cdot\|_{p_1}$ y $\|\cdot\|_{p_2}$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$

e) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

f) Considere ahora el e.v.n $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de las funciones continuas definidas en $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ y las siguientes normas:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad\qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$$

Muestre que en este caso $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes.

Solución:

a) Sin pérdida de generalidad asummimos $p \leq q$ (si no, los intercambiamos)

- Caso $p = 1, q = \infty$. Basta ver $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|y\|_\infty = \|y\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \|y\|_\infty$

- Caso $p \in (1, \infty)$, $q = \frac{p}{p-1}$. La afirmación es trivial si x o y son 0, luego, los asumiremos disintos de 0. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ definimos $a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ y $b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$. Por el hint tenemos que $a_i b_i = \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}a_i^p + \frac{1}{q}b_i^q$
  Sumando sobre todos los i, tenemos
  $$\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right) \leq \frac{1}{p\|x\|_p^p}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right) + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
  Multiplicando por $\|x\|_p\|y\|_q$ se concluye el resultado.

b)

- $\|x\|_p = 0 \implies (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \implies |x_i| = 0\ \forall i \in \{1, ..., n\} \implies x = 0$
- $\|\lambda x\|_p = (\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^n |\lambda|^p |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p$
- Veamos que $\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1}$
  Analizemos ahora la primera sumatoria, tomando $a_i = x_i$ y $b_i = (x_i+y_i)^{p-1}$, podemos usar la desigualdad de la parte **a)**
  $\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |b_i|^q)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$
  Usando que $q = \frac{p}{p-1}$ tendremos
  $\sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} = \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1}$
  Análogamente, podemos acotar la segunda sumatoria y nos queda
  $\sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x+y\|_p^{p-1}$
  En resumen, tenemos
  $\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \|x+y\|_p^{p-1} = (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}$
  Diviendo a ambos lados por $\|x+y\|_p^{p-1}$ (lo podemos asumir distinto de 0 porque si no es fácil ver que se tiene la desigualdad) nos queda $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ y podemos concluir.

c) Veamos que $\|x\|_p \leq c_1 \|x\|_\infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \max_{k=1,\dots,n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \left(\left(\max_{k=1,\dots,n} |x_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

Tomando $c_1 = n^{\frac{1}{p}}$ se concluye.

Ahora veamos la otra constante.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\max_{k=1,\dots,n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty$$

Tomando $c_2 = 1$ se concluye. Luego, las normas son equivalentes.

d) Como $\|\cdot\|_{p_1}$ y $\|\cdot\|_{p_2}$ son equivalentes a $\|\cdot\|_\infty$, se tiene

$$\|\cdot\|_{p_1} \leq c_1 \|\cdot\|_\infty \leq c_1 c_2 \|\cdot\|_{p_2}$$

Y la otra desigualdad se concluye de manera análoga.

e) Por la parte **c)**, se tiene

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Tomando el límte $p \to \infty$ se concluye.

f) Notemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una $f_m \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ tal que $\|f_m\|_\infty \geq k \|f_m\|_1$. En efecto, podemos definir

$$f_m(x) = \begin{cases} 2m^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2m}] \\ -2m^2 x + 2m & \text{si } x \in [\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{m}, 1] \end{cases}$$

Y se tiene que $\|f_m\|_\infty = m$ y $\|f_m\|_1 = \frac{1}{2}$, obteniéndose lo que queríamos. Concluimos que no existe una constante c tal que $\|\cdot\|_\infty \leq c \|\cdot\|_1$, es decir, las normas no son equivalentes.

P3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.
a) Muestre que si $c-a = t\cdot(b-a)$, con $t \geq 1$, entonces $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$. (La igualdad significa que b pertence a la recta entre a y c)
b) Muestre que la recíproca no es necesariamente cierta. Esto es, muestre un e.v.n $(F, \|\cdot\|_F)$ y puntos $a, b, c \in F$ tales que $d(a,c) = d(a,b) + (b,c)$ pero no se tiene que $c-a = t\cdot(b-a)$
c) Muestre que si en E la norma proviene de un producto interno, esto es, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, entonces la recíproca sí es cierta.
Hint : Puede usar que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si y solo si $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>Recuerdo:</u> Un producto interno en E es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle, \quad \forall x, y, z \in E$
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in E \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \forall x, y \in E$
- $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in E$
- $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in E$

Solución:
a) Notemos que $b - c = b - t\cdot(b-a) - a = (1-t)b - (1-t)a = (1-t)(b-a)$. Luego,
$\|b-a\| + \|b-c\| = \|b-a\| + |1-t|\|b-a\| = \|b-a\| + (t-1)\|b-a\| = t\|b-a\| = \|t(b-a)\| = \|c-a\|$
Se usó que $|1-t| = t-1$ pues $t \geq 1$. Además como $t \geq 0$, pudimos «entrarlo» a la norma.

b) Tomemos $F = \mathbb{R}^2$ y $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_1$. Tomando $a = (0,1)$, $b = (0,0)$ y $c = (1,0)$, se tiene $d(a,c) = 2$ $d(a,b) = 1$ y $d(b,c) = 1$. Luego, se tiene que $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$, pero $b - a = (0,-1)$ y $c - a = (1,-1)$ son vectores linealmente independientes, luego, no existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $c - a = t\cdot(b-a)$.

c) Notemos que si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$. Usando que la norma viene de un producto interno, tenemos que
$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$
Luego, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \implies \langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$, por la positividad de las normas, tenemos $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$.
Por el hint, ahora tenemos que $x = \lambda y$, más aun, tenemos que $\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \|x\|\|y\| \geq 0$, luego, $\lambda \geq 0$.
Tomemos $x = b - a$ e $y = c - b$, por hipótesis tenemos $\|(c-b) + (b-a)\| = \|c-a\| = \|c-b\| + \|b-a\|$. Luego, $c - b = \lambda\cdot(b-a)$. Esto implica $c = \lambda\cdot(b-a) + b = (\lambda+1)(b-a) + a$, luego, $c - a = (\lambda+1)(b-a)$. Tomando $t = \lambda + 1 \geq 1$ se concluye.