MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 15 : Formas Cuadráticas y Repaso Examen

19 de diciembre del 2016

Recordemos:

- Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica definimos $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
$$q(x) = x^t A x$$
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica diremos que A es definida positiva si $\forall x \neq 0$ tenemos que $x^t A x > 0$. Si $-A$ es definida positiva diremos que A es definida negativa.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:
  1. A es definida estrictamente positiva.
  2. Los valores propios de A son estrictamente positivos.
  3. Las menores principales de A:
  $$A^{(1)} = |a_{11}| \quad A^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \dots \quad A^{(n)} = |A|$$
  son todas estrictamente positivas.
  4. El método de Gauss permite escalonar A solo con operaciones del tipo $E_{pq}(\alpha)$ $p < q$ permite escalonar A y además los pivotes son siempre estrictamente positivos.
  5. $A = RR^t$ con R triangular inferior y de diagonal estrictamente positiva.
- Sea $q = x^t A x$ forma cuadrática, existe L invertible tal que $z = Lx$, entonces en términos de z:
$$q(z) = z_1^2 + \dots + z_p^2 - (z_{p+1}^2 + \dots + z_r^2)$$
Donde p es el número de valores propios positivos de A y r es el número de valores propios no nulos (o de manera equivalente rango(A)).
- Identidad útil:
$$ax^2 + by^2 + cxy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

P1. [P3 Control 3, Año 2015]

a) Supongamos que $0 < a < b < c$ y consideremos la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$
Pruebe que A es definida positiva.

b) Supongamos que $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$.

(i) Pruebe que:
$$B = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^t$$
es semi-definida positiva. Además pruebe que si $x^t B x = 0$, para algún $x \in \mathbb{R}^n$ entonces para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene que $u_i^t x = 0$.

(ii) Suponga ahora que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, pruebe que B es definida positiva.

P2. [Orden para las matrices simétricas]
Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices simétricas. Definimos la siguiente relación en $\mathcal{S}$:
$$A \geq B \iff A - B \text{ es semi-definida positiva.}$$

a) Demuestre que $\geq$ es una relación de orden.

b) Demuestre que si $A \geq 0$, entonces existe $B \geq 0$ tal que $B^2 = A$.
Obs: Llamaremos a dicho B como $\sqrt{A}$.

c) Sea $A \geq 0$ invertible. Demuestre que $A^{-1} \geq 0$ y que $\sqrt{A}$ es invertible. Más aún muestre que $\sqrt{A}^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$-

d) Sea $A \geq 0$ invertible. Demuestre que:
$$A \geq I \implies I \geq A^{-1}$$

e) Sea $A, B, C \geq 0$. Demuestre que
$$A \geq B \implies CAC \geq CBC$$

f) Sean $A, B \geq 0$ invertibles. Demuestre que:
$$A \geq B \implies B^{-1} \geq A^{-1}$$

Examen 2008-2

P3. Sea $S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$. Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una aplicación lineal que cumple con:

$$(i)\ \mathrm{Ker}(f) = S, \quad (ii)\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad (iii)\ f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

a) Encontrar una base de S, reduciendo el conjunto generador dado.

b) Usando el Teorema Núcleo-Imagen, determine la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Encontrar una base de $\mathrm{Im}(f)$.

d) Determinar explicitamente la aplicación f.

P4. *a)* Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal, es decir, $P^t = P^{-1}$. Pruebe que si $v, z \in \mathbb{R}^n$ son tales que $v = P^t z$ entonces $\|v\| = \|z\|$.

b) Dada $H \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica, demuestre que:
$$\alpha\|z\|^2 \leq z^t Hz \leq \beta\|z\|^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$
donde α es el mínimo valor propio de H y β es el máximo valor propio de H.

P5. Sea $z \in \mathbb{R}^n$. Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ definida por: $A = I + zz^t$

a) Pruebe que A es diagonalizable.

b) Pruebe que z es vector propio de A y calcule su valor propio correspondiente.

c) Sea $\mu \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a z. Pruebe que μ es vector propio de A asociado al valor propio 1.

d) Pruebe que el subespacio ortogonal a z tiene dimensión $n - 1$.

e) Encuentre todos los valores propios de A y sus multiplicidades.

f) Calcule el determinante de A.

g) Encuentre $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $A^{-1} = I + \beta zz^t$.

P6. [Propuesto/Fórmula de Courant-Fischer y Optimización]
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se definen:
$$m = \min_{\|x\|=1} x^t Ax \qquad M = \max_{\|x\|=1} x^t Ax$$
Demuestre que m es el menor valor propio de A y que M es el mayor valor propio de A. Use esto para minimizar la función $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy + 15$ en el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.