MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor : Mauricio Telias H.
Auxiliar : Arturo Merino F.

Pauta 15 : Orden para matrices simétricas

19 de diciembre del 2016

Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices simétricas. Definimos la siguiente relación en $\mathcal{S}$:

$$A \geq B \iff A - B \text{ es semi-definida positiva.}$$

a) Demuestre que $\geq$ es una relación de orden.

b) Demuestre que si $A \geq 0$, entonces existe $B \geq 0$ tal que $B^2 = A$.
Obs: Llamaremos a dicho B como $\sqrt{A}$.

c) Sea $A \geq 0$ invertible. Demuestre que $A^{-1} \geq 0$ y que $\sqrt{A}$ es invertible. Más aún muestre que $\sqrt{A}^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$-

d) Sea $A \geq 0$ invertible. Demuestre que:

$$A \geq I \implies I \geq A^{-1}$$

e) Sea $A, B, C \geq 0$. Demuestre que

$$A \geq B \implies CAC \geq CBC$$

f) Sean $A, B \geq 0$ invertibles. Demuestre que:

$$A \geq B \implies B^{-1} \geq A^{-1}$$

Solución 1.

a)
- **Refleja:**
Notemos que $A \geq A$ pues $A - A = 0$ es semi-definida positva.
- **Antisimétrica:**
Si $A \geq B$ y $B \geq A$ tenemos que:

$$x^t(A-B)x \geq 0 \qquad x^t(B-A)x \geq 0$$

Y por tanto:

$$x^t(A-B)x = 0$$

Observemos que como $A - B$ es simétrica $A - B = PDP^t$. Reemplazando:

$$\begin{aligned} 0 &= x^t(A-B)x \\ &= x^tPDP^tx \\ &= (\underbrace{P^tx}_{z})^tD(\underbrace{P^tx}_{z}) \\ &= z_1^2\lambda_1 + \cdots + z_n^2\lambda_n \end{aligned}$$

Eligiendo $z_i \neq 0$ para todo i, tenemos que $\lambda_i = 0$ para todo i. Luego:

$$A - B = P0P^t = 0$$

Y por tanto $A = B$.
Obs: Otra forma de verlo es que los valores propios de $A - B$ son positivos y negativos a la vez luego son 0.

- **Transitividad:**
  Si $A \geq B$ y $B \geq C$ tenemos que:

$$x^t Ax \geq x^t Bx \qquad x^t Bx \geq x^t Cx$$

  Luego:

$$x^t Ax \geq x^t Cx \implies x^t(A-C)x \geq 0$$

  De donde concluimos que $A \geq C$.

b) Notemos que A tiene solo valores propios positivos, luego:

$$\begin{aligned} A &= PDP^t \\ &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^t \\ &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t \\ &= \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t}_{\sqrt{A}} \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t}_{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

c)
- **PDQ** $A^{-1} \geq 0$
  Notemos que como A es invertible todo sus valores propios son estrictamente positivos, sino $|A| = p_A(0) = 0$.
  Notemos que si $A = PDP^t$ de valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$B = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t$$

  Entonces $AB = I$, es decir $B = A^{-1}$, además A^{-1} tiene solo valores propios positivos y por tanto $A^{-1} \geq 0$.

- **PDQ $\sqrt{A}$ es invertible**
  Notemos que:

$$B = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} P^t$$

  Es tal que $B\sqrt{A} = I$, luego $\sqrt{A}$ es invertible, además como $B = A^{-1}$ tiene sólo valores positivos es definida positiva.

  Obs: Otra forma de verlo (pero que no da una forma explícita para $\sqrt{A}^{-1}$) es que $\sqrt{A}$ no tiene a 0 como valor propio y por tanto $|A| \neq 0$.

- **PDQ** $\sqrt{A^{-1}} = \sqrt{A}^{-1}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{A}^{-1} &= \left[P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t \right]^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} P^t \\
&= \sqrt{A^{-1}}
\end{aligned}$$

d) Notemos que si $A \geq I$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$x^t(A-I)x \geq 0 \implies x^tAx \geq \underbrace{x^tx}_{\|x\|^2}$$

Además:

$$x^tAx = x^t\sqrt{A}\sqrt{A}x = (\sqrt{A}^t x)^t\sqrt{A}x = (\sqrt{A}x)^t\sqrt{A}x = \|\sqrt{A}x\|^2$$

Es decir para todo vector x tenemos que

$$\|\sqrt{A}x\|^2 \geq \|x\|^2$$

Tomando $x = \sqrt{A}^{-1}y$ tenemos que:

$$\|y\|^2 \geq \|\sqrt{A^{-1}}y\|^2$$

Expandiendo esto tenemos:

$$\begin{aligned}
y^ty &\geq (\sqrt{A^{-1}}y)^t\sqrt{A^{-1}}y \\
y^tIy &\geq y^t\sqrt{A^{-1}}^t\sqrt{A^{-1}}y \\
y^tIy &\geq y^t\underbrace{\sqrt{A^{-1}}\sqrt{A^{-1}}}_{A^{-1}}y \\
y^t(I-A^{-1})y &\geq 0
\end{aligned}$$

Lo anterior es valido para tod $y \in \mathbb{R}^n$, por tanto $I - A^{-1}$ es semi-definida positiva , es decir $I \geq A^{-1}$.

e) Tenemos que para todo x:

$$x^t(A-B)x \geq 0$$

En particular para $x = Cy$:

$$(Cy)^t(A-B)Cy = y^tC^t(A-B)Cy = y^tC(A-B)Cy = y^t(CAC - CBC)y \geq 0$$

Como lo anterior vale para todo y tenemos que $CAC - CBC$ es semi-definida positiva y por tanto $CAC \geq CBC$.

f) Por la parte *e*) tenemos que:

$$A \geq B \implies \sqrt{B}^{-1}A\sqrt{B}^{-1} \geq \sqrt{B}^{-1}B\sqrt{B}^{-1} \implies \sqrt{B}^{-1}A\sqrt{B}^{-1} \geq I$$

Ahora podemos usar la parte *d*) y tenemos:

$$I \geq [\sqrt{B}^{-1}A\sqrt{B}^{-1}]^{-1} \implies I \geq \sqrt{B}A^{-1}\sqrt{B}$$

Nuevamente usando la parte *e*) obtenemos:

$$\sqrt{B^{-1}}I\sqrt{B^{-1}} \geq \sqrt{B^{-1}}\sqrt{B}A^{-1}\sqrt{B}\sqrt{B^{-1}} \implies B^{-1} \geq A^{-1}$$

Que era lo pedido.