MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Resumen Examen

Def: Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ la representaremos de la manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde cada $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Diremos además que dos matrices son iguales, si lo son a coordenadas.

Def: Definimos las suma para matrices de igual dimensión por coordenadas, es decir si $C = A + B$ entonces:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Pro: $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano.

Def: Si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$. Definimos $C = AB$ como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Pro: $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo con unidad.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ definimos $A^k = AA^{k-1}$ con la convención $A^0 = I$.

Def: $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dirá triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$. De manera análoga se dirá triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$. Por último si una matriz es triangular superior e inferior diremos que es diagonal.

Pro: El producto de matrices triangulares superiores, inferiores o diagonales es una matriz triangular, superior o diagonal respectivamente.

Def: Definimos la matriz traspuesta de A, llamada A^t por

$$(a^t)_{ij} = a_{ji}$$

Def: Si una matriz A verifica que $A = A^t$ diremos que A es simétrica.

Pro: Sean A, B matrices tal que AB tiene sentido. Entonces:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. Si A es diagonal, entonces A es simétrica.

Def: Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es invertible si existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que: $AB = I = BA$.

Pro: Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Luego:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Def: Se definen las matrices de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz, que es la identidad con las filas p y q permutadas. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces $I_{pq}A$ es la matriz A con las filas p y q permutadas.

Def: Se definen las matrices elementales $E_{pq}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz, que es la identidad salvo que en la posición q, p hay un λ. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces $E_{pq}(\lambda)A$ es la matriz A salvo que la fila q tiene sumada a la fila p ponderada por $\lambda \in \mathbb{K}$.

Def: Diremos que una matriz A esta escalonada si:

1. Todas las filas no-nulas estan sobre las filas nulas.
2. El pivote (primer coeficiente no nulo) de una fila no -nula está siempre estrictamente a la derecha del pivote de la fila de más arriba.

Pro: Sea A una matriz. Podemos premultiplicar A por una colección de matrices elementales $E_1, \ldots, E_n$,

$$\tilde{A} = \left(\prod_{j=1}^{n} E_j \right) A$$

de manera que $\tilde{A}$ esté escalonada. Si este escalonamiento no tiene ceros en la diagonal, entonces A es invertible.

Pro: [**Algoritmo de Gauss**] Para resolver $Ax = b$ (con A invertible).

1. Escribir la matriz aumentada $(A|b)$.
2. Escalonar la matriz aumentada obteniendo $(\tilde{A}|\tilde{b})$.
3. Pasar la matriz aumentada a forma final, obteniendo $(A'|b')$.
4. b' es solución.

Pro: $I_{pq}^{-1} = I_{pq}$ y $E_{pq}(\lambda)^{-1} = E_{pq}(-\lambda)$.

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución única.

3. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución.
4. Sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A. Entonces $\tilde{A}$ no tiene ceros en la diagonal.

Pro: Una matriz triangular superior (o inferior) es invertible si y sólo si no tiene ceros en la diagonal.

Pro: [**Algoritmo de Gauss para invertibilidad**] Para encontrar A^{-1} (con A invertible).

1. Escribir la matriz aumentada $(A|I)$.
2. Escalonar la matriz aumentada obteniendo $(\tilde{A}|B)$.
3. Pasar la matriz aumentada a forma final, obteniendo $(I|B')$.
4. $A^{-1} = B'$

Def: Una recta es el conjunto:

$$L_{p,d} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + \alpha d \ \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Def: Un plano es el conjunto:

$$\Pi_{p,d_1,d_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + \alpha d_1 + \beta d_2 \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Def: Llamamos ecuacion cartesiana que describe un objeto $n-dimensional$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ a la ecuación:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = r$$

Def: Diremos que dos vectores x, y son paralelos si $\exists\lambda$ tal que $x = \lambda y$.

Def: Definimos el producto punto en $\mathbb{R}^n$ como sigue:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = y^t x$$

Pro: El producto punto tiene las siguientes propiedades:

- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- $\langle \lambda x + z, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$
- $\langle x, x\rangle \geq 0$
- $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

Def: Diremos que dos vectores $a, b \neq 0$ son ortogonales si $\langle a, b\rangle = 0$.

Def: Definimos la norma de un vector en $\mathbb{R}^n$ por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Pro: La norma tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def: Definimos el coseno del angulo entre dos vectores x, y por:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

Teo: (de Cauchy-Shwarz)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Def: Definimos el determinante de una matriz 2×2 por:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Def: Definimos el determinante de una matriz 3×3 por:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= (aei + bfg + cdh) - (ceg + bi + afh) \end{aligned}$$

Def: Definimos el producto cruz entre dos vectores $\in \mathbb{R}^3$ como:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Pro: El producto cruz tiene las siguientes propiedades:

- $(x \times y)\perp y \wedge (x \times y)\perp x$
- $x \times y = -y \times x$
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
- $(\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$
- $x \parallel y \iff x \times y = 0.$
- $\|x \times y\| = \|x\|\|y\|\sin(\theta)$

Pro: El área de un paralelogramo creado por u y v es $\|u \times v\|$ además el volumen de un paralelepípedo creado por u, v y w es $|\langle u \times v, w\rangle|$.

Def: Un plano puede ser descrito por una ecuación del tipo $\langle x - p, n\rangle = 0$ donde p es un punto del plano y n un vector ortogonal a el. Esto se conoce como ecuación normal.

Def: Una proyección ortogonal es aquella que minimiza la distancia del punto a la recta o plano.

Pro: Consideremos el punto Q y los conjuntos :

$$L \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : x = P + tD \ \ t \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - P, N\rangle = 0\}$$

La proyección ortogonal de Q en L es:

$$P + \left\langle Q - P, \frac{D}{\|D\|} \right\rangle \frac{D}{\|D\|}$$

La proyección ortogonal de Q en Π es:

$$Q + \left\langle P - Q, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|}$$

Def: Llamamos $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ si para todo $u, v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, se verifican las siguientes propiedades:

- $(V, +)$ es grupo abeliano y $\mathbb{F}$ un cuerpo.
- $\lambda u \in V$.
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
- $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
- $1_{\mathbb{F}} u = u$.

Pro: Sea $P = (x_0, y_0)$ y $L : Ax + By + C = 0$ un punto y una recta en $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Luego:

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pro: Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ y $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ un punto y un plano en $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Luego:

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pro: Sea $\Pi_1 : Ax + By + Cz + R_1 =$ y $\Pi_2 : Ax + By + Cz + R_2 = 0$ dos planos paralelos y distintos. Luego:

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|R_1 - R_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Def: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial de V si y sólo si:

1. $\forall u, v \in U,\ u + v \in U$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in U,\ \lambda u \in U$.

Pro: Sean U, V subespacios vectoriales de E, luego $U \cap V$ es un subespacio vectorial de E.

Pro: $E \subseteq V_{\mathbb{F}}$ no vacío es s.e.v. del espacio vectorial $V_{\mathbb{F}}$ si y sólo si:

$$\forall x, y \in E \ \ \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad x + \lambda y \in E$$

Def: Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ un conjunto de vectores y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ un conjunto de escalares. Llamaremos combinación lineal a la siguiente suma ponderada:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

Def: Sean $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ con V espacio vectorial. Definimos el generado por A como:

$$\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Pro: $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$ es un subespacio vectorial de V, además es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Def: Diremos que un conjunto de vectores $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Donde λ_i son escalares.

Def: Diremos que un conjunto de vectores $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es linealmente dependientes si existen $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ escalares, no todos nulos tal que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

Teo: En $\mathbb{R}^n$, $m > n$ vectores son siempre linealmente dependientes.

Def: Dado un espacio vectorial V, diremos que un conjunto A es una base de V si:

1. A es linealmente independiente.
2. $V = \langle A \rangle$

Pro: Sea E un espacio vectorial, B será una base de E si y sólo si todo $v \in E$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de elementos de B.

Pro: Sea E un espacio vectorial e G un conjunto tal que $\langle G \rangle = E$, entonces existe un conjunto A tal que $G \setminus A$ es una base de E.

Pro: Sea E un espacio vectorial e I un conjunto l.i., entonces existe un conjunto B tal que $I \cup B$ es una base de E.

Pro: Sea B una base tal que $|B| = n$ y un conjunto X tal que $|X| > n$. Entonces X es linealmente dependiente.

Pro: Sea B una base tal que $|B| = n$. Luego el cardinal de todas las bases es n.

Def: Sea B una base de V, definimos la dimensión como $\dim V = |B|$.

Teo: Sea V un e.v. tal que $\dim V = n$.

1. Todo conjunto X l.i. tal que $|X| = n$ es base.
2. Sea U un s.e.v. de V, entonces $\dim U \leq \dim V$. Además si $\dim U = \dim V$, entonces $U = V$.

Def: Sean U y W subespacios vectoriales de $V_{\mathbb{K}}$ definimos el subespacio suma como:

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U, w \in W\}$$

si además $U \cap W = \{0\}$, a esta suma la llamaremos directa y la denotaremos por $U \oplus W$.

Teo: (Grassmann) Sean U, V subespacios vectoriales de E, entonces:

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

Def: Sean U y V dos espacios vectoriales. Diremos que una función $T : U \to V$ es una transformación lineal si:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in U \quad T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$$

Pro: Sea $T : U \to V$ lineal. Entonces:

1. $T(0) = 0$.
2. $T(-x) = -T(x)$.

Pro: Sean $T : U \to V$ y $F : V \to W$ lineales. Luego $F \circ T$ es lineal.

Def: Sea $T : U \to V$ una transformación lineal biyectiva, diremos entonces que T es un isomorfismo. Más aún diremos que U y V son isomorfos y lo denotaremos por $U \cong V$. Por último $\cong$ es una relación de equivalencia.

Def: Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, definimos los siguientes subespacios asociados a T:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \{x \in U : T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}) \\ \operatorname{Im} T &= \{T(u) \in V : u \in U\} = T(U) \end{aligned}$$

Def: Sea T una transformación lineal definimos el rango y la nulidad de T como:

$$\begin{aligned} \operatorname{rango}(T) &= \dim(\operatorname{Im}(T)) \\ \operatorname{null}(T) &= \dim(\operatorname{Ker}(T)) \end{aligned}$$

Pro: Sea T transformación lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Pro: Sea $T : U \to V$ función lineal inyectiva. Entonces si $A \subseteq U$ es l.i. $T(A)$ también lo es.

Teo: (del Nucléo-Imagen) Sea $T : U \to V$ una transformación lineal donde $\dim U < \infty$, entonces:

$$\dim U = \operatorname{rango}(T) + \operatorname{null}(T)$$

Cor: Sea $T : U \to V$ lineal.

1. Si $\dim U = \dim V$:

   $$T \text{ inyectiva} \iff T \text{ sobreyectiva} \iff T \text{ biyectiva}$$

2. Si $\dim U > \dim V$, entonces T no puede ser inyectiva.
3. Si $\dim U < \dim V$ no puede ser sobreyectiva.

Cor: Dos espacios E y V de dimensión finita son isomorfos si y sólo si $\dim E = \dim V$.

Teo: Toda transformación lineal $T : U \to V$ queda determinada por su acción sobre bases. Es decir si:

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} v_i$$

Donde $u_j \in \beta_U$ y $v_i \in \beta_V$ son elementos de la base de U y V respectivamente. A la matriz

$$(M_{\beta_U, \beta_V}(T))_{ij} = a_{ij}$$

la llamaremos matriz representante de la transformación lineal.

Def: Sean U y V dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, definimos el siguiente espacio vectorial (con las operaciones suma y composición):

$$\mathcal{L}(U, V) = \{T : U \to V : T \text{ es lineal}\}$$

Pro: Si $\dim U = p$ y $\dim V = q$, entonces tenemos $\mathcal{L}(U, V) \cong \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

Pro: Sean $M_{\beta_V \beta_W}(L)$ y $M_{\beta_U \beta_V}(T)$ matrices representantes de las transformaciones L y T, entonces :

$$M_{\beta_U \beta_V}(L \circ T) = M_{\beta_V \beta_W}(L) M_{\beta_U \beta_V}(T)$$

Pro: T es invertible si y sólo si $M_{BB'}(T)$ lo es, en dicho caso:

$$M_{BB'}(T^{-1}) = M_{BB'}(T)^{-1}$$

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Las siguientes son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definida por $T_A(x) = Ax$ es biyectiva.
3. El conjunto $\{A_{\bullet j}\}_{j=1}^n$ es base de $\mathbb{K}^n$.

Def: Diremos que dos matrices A y B son semejantes si existen P y Q invertibles tales que:

$$A = PBQ$$

Si ademas $Q = P^{-1}$ decimos que son similares.

Def: Definimos el rango de una matriz A como el rango de la función T_A definida como:

$$T_A(x) = Ax$$

Pro: El rango(A) es igual a la cantidad de filas l.i. que tiene A.

Pro: Dos matrices son semejantes si y sólo si tienen el mismo rango.

Def: Diremos que $x \in V$ es una vector propio de T si verifica:

1. $x \neq 0$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(x) = \lambda x$.

Al valor λ que verifica 2. lo llamaremos valor propio asociado a x.

Def: Definimos el determinante de A de la siguiente manera:

1. Si A es de 1×1, entonces $|A| = a_{11}$.
2. En general $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}|$

Pro: El determinante tiene muchas propiedades, entre las más importantes se encuentran:

1. El determinante es una función lineal de las filas.
2. Si B se obtiene permutando dos filas de A, entonces $|A| = -|B|$.
3. Sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A y N_σ el numero de permutaciones de filas usadas al escalonar A. Entonces:
$$|A| = (-1)^{N_\sigma} \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii}$$
4. A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$.
5. $|AB| = |A||B|$
6. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ y $|A^t| = |A|$.

Def: Definimos el polinomio característico de una matriz A como $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$

Def: Diremos que λ_0 es valor propio de A si $p_A(\lambda_0) = 0$.

Pro: λ es valor propio de A si y solo si es valor propio de las transformaciones asociadas a A

Pro: Para todo valor propio definimos el espacio propio como

$$W_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

Los $x \in W_\lambda$ son justamente los vectores propios asociados a λ.

Def: Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si existen matrices $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

con P invertible y D diagonal. Además esto se hace de manera la matriz D contiene los valores propios en la diagonal y que las columnas de P sean tanto vectores propios de A como una base de $\mathbb{K}^n$.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A definimos la multiplicidad algebraica de λ (que llamaremos $\alpha(\lambda)$) como la mayor potencia de $(x - \lambda)$ que divide a p_A.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Definimos la multiplicidad geométrica de λ como:

$$\gamma(\lambda) = \dim(W_\lambda)$$

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Luego:

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n$$

Teo: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces las siguientes son equivalentes.

1. A es diagonalizable.
2. A es similar a una matriz diagonal.
3. $p_A(x)$ se factoriza completamente en factores lineales y para todo valor propio λ tenemos que $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$.
4. Existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.
5. Sea $\sigma(A)$ el conjunto de valores propios de A, entonces:
$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \gamma(\lambda) = n$$
6. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ser diagonalizable equivale a que para todo valor propio $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$.

Pro: Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

Def: Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

Def: Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá ortonormal si es ortogonal y $\|v_i\| = 1$, $\forall i$.

Pro: Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortonormal de W, entonces:

1. Si $x \in W$:
$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$$
2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ definimos:
$$P_W(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$$
Luego $(x - P_W(x)) \perp w$ para todo $w \in W$. En particular:
$$d(x, P_W(x)) = \min_{w \in W} d(x, w)$$
Además $P_W(x)$ es el único elemento que minimiza la distancia anterior. Por último $P_W(x)$ es una función lineal en x.

Def: Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ s.e.v. definimos el ortogonal de W como:
$$W^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle w, u \rangle, \forall w \in W\}$$

Def: Tenemos las siguientes propiedades del ortogonal:

1. $W^{\perp}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$.
3. $\dim(W^{\perp}) = n - \dim(W)$.

Teo: de Gram-Schmidt Todo $U \subseteq R^n$ s.e.v. tiene una base ortonormal.

Alg: de Gram-Schmidt Recibe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$

1. $\tilde{y}_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
2. $y_k = x_k - P_{\langle \{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{k-1}\} \rangle}(x_k)$
Si $y_k = 0$ descartarlo, sino: $\tilde{y}_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$
3. Devolver los $\tilde{y}_k$ que no descartamos, esto será base ortonormal de $\langle \{x_1, \ldots, x_m\} \rangle$.

Def: Dados $u, v \in \mathbb{C}^n$ definimos el producto Hermítico por:
$$\langle u, v \rangle_H = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}$$
Las propiedades clásicas del producto interno tienen su versión para el producto hermítico.

Pro: $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es simétrica si y sólo si $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$.

Def: Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$, definimos la adjunta A^* por:
$$(a^*)_{kl} = \overline{a_{lk}}$$
Diremos que A es hermítica si $A = A^*$.

Def: Definimos el espectro de $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ (o en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$) por:
$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p_A(\lambda) = 0\}$$

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ hermítica, entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Pro: Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ es hermítica y v_1, v_2 son dos vectores propios que provienen de distinto subespacios propios, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle_H = 0$.

Pro: Sea W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tal que $\dim W \geq 1$ y $L : W \to W$ ñineal, simétrica, entonces existe una base ortonormal de W de vectores propios de L.

Def: Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, tal que $PP^t = I$ diremos que P es ortogonal o unitaria.

Teo: Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A es diagonalizable con P ortogonal.

Def: Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica definimos $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
$$q(x) = x^t A x$$

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica diremos que A es definida positiva si $\forall x \neq 0$ tenemos que $x^t A x > 0$. Si $-A$ es definida positiva diremos que A es definida negativa.

Teo: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. A es definida estrictamente positiva.
2. Los valores propios de A son estrictamente positivos.
3. Las menores principales de A:
$$A^{(1)} = |a_{11}| \quad A^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad A^{(n)} = |A|$$
son todas estrictamente positivas.
4. El método de Gauss permite escalonar A solo con operaciones del tipo $E_{pq}(\alpha)$ $p < q$ permite escalonar A y además los pivotes son siempre estrictamente positivos.
5. $A = RR^t$ con R triangular inferior y de diagonal estrictamente positiva.

Pro: Sea $q = x^t Ax$ forma cuadrática, existe L invertible tal que $z = Lx$, entonces en términos de z:

$$q(z) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - (z_{p+1}^2 + \cdots + z_r^2)$$

Donde p es el número de valores propios positivos de A y r es el número de valores propios no nulos (o de manera equivalente rango(A)).

Pro: Identidad útil:

$$ax^2 + by^2 + cxy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$