MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Representación y cambio de base

13 de noviembre del 2016

Un problema típico de álgebra lineal es el de encontrar matrices representantes. Es decir dado una transformación lineal $T : U \to V$ y las bases $\beta_V \subseteq V$ y $\beta_U \subseteq U$, encontrar la matriz $M_{\beta_U \beta_V}(T)$ que representa dicha transformación respecto a esas bases. Esto se hace simplemente evaluando T en cada elemento de β_V y expresando esa evaluación en terminos de β_U. Esto será justamente las columnas de $M_{\beta_U \beta_V}(T)$.

Ejemplo 1. *Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ la siguiente transformación lineal:*

$$T(ax^2 + bx + c) = bx + c$$

Encontremos $M_{\alpha\beta}(T)$, con $\alpha = \{1, x, x^2\}$ base de la salida y $\beta = \{1, x\}$ base de la llegada. Evaluando en cada elemento de α tenemos:

$$\begin{array}{rcccl} T(1) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ T(x) & = & x & = & 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \\ T(x^2) & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \end{array}$$

Notemos que cada evaluación esta expresada en términos de la base β, luego la matriz representante tendrá por columnas los coeficientes de la evaluación, es decir:

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \hat{T}(1) & \hat{T}(x) & \hat{T}(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El problema es diferente cuando las bases involucradas son menos "naturales" (al contrario del Ejemplo 1) o cuando ya conocemos alguna matriz representante $M_{\beta_U \beta_V}(T)$ respecto a un par de bases, pues nos gustaría aprovecharnos de la matriz representante que ya poseemos o que ya sabemos calcular. Es decir dado una matriz representante $M_{\beta_U \beta_V}(T)$ y dos bases nuevas β'_U y β'_V ¿Como logramos obtener $M_{\beta'_U \beta'_V}(T)$?. Aprovechemos el hecho de que componer matrices es multiplicarlas y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U_{\beta_U} \arrow[r, "T"'] & V^T_{\beta_V} \arrow[d, "Id_V"] \\ U_{\beta'_U} \arrow[u, "Id_U"] \arrow[r, "T"'] & V^T_{\beta'_V} \end{tikzcd}$$

Es decir en vez de pasar de U con la base β_U a V con la base β_V directamente, lo haremos ocupando las matrices que representan Id_U y Id_V en las diferentes bases, mediante la siguiente relación:

$$M_{\beta'_U \beta'_V}(T) = M_{\beta'_U \beta'_V}(Id_V \circ T \circ Id_U) = M_{\beta_V \beta'_V}(Id_V) M_{\beta_U \beta_V}(T) M_{\beta'_U \beta_U}(Id_U)$$

Las matrices $M_{\alpha\beta}(Id)$ las llamaremos matrices de *cambio de base*. Notemos que en el caso donde solo cambie la base de salida o la de llegada, simplemente basta con reemplazar la matriz de cambio de base que "sobra" correspondiente con la identidad.

Ejemplo 2. *Consideremos $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ definida como en el Ejemplo 1. Queremos encontrar $M_{\alpha'\beta'}(T)$ donde $\alpha' = \{6, 3x+1, x^2\}$ y $\beta' = \{x, 1\}$. Notemos que como ya conocemos la matriz $M_{\alpha\beta}(T)$ del ejemplo anterior, basta con* *encontrar $M_{\alpha'\alpha}(Id_{\mathcal{P}_2})$ y $M_{\beta\beta'}(Id_{\mathcal{P}_1})$, para esto procedemos igual que para cualquier transformación es decir evaluando en las bases:*

$$\begin{array}{rcccl} Id_{\mathcal{P}_2}(6) & = & 1 & = & 6 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ Id_{\mathcal{P}_2}(3x+1) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 3 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ Id_{\mathcal{P}_2}(x^2) & = & 1 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{array}$$

Por tanto la matriz representante $M_{\alpha'\alpha}(Id_{\mathcal{P}_2})$ seria :

$$M_{\alpha'\alpha}(Id_{\mathcal{P}_2}) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente para $M_{\beta\beta'}(Id_{\mathcal{P}_1})$ tenemos:

$$\begin{array}{rcccl} Id_{\mathcal{P}_1}(1) & = & x & = & 0 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ Id_{\mathcal{P}_1}(x) & = & 1 & = & 1 \cdot x + 0 \cdot 1 \end{array}$$

y por tanto:

$$M_{\beta\beta'}(Id_{\mathcal{P}_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz representante que buscábamos sería:

$$M_{\alpha'\beta'}(T) = M_{\beta\beta'}(Id_{\mathcal{P}_1})M_{\alpha\beta}(T)M_{\alpha'\alpha}(Id_{\mathcal{P}_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices de cambio de base también serán útiles para comprender los conceptos de *semejanza* y *similaridad* apoyándonos de la siguiente proposición.

Proposición. *Una matriz es invertible si y solo si es una matriz de cambio de base.*

Notemos que esto hace nacer de manera mas natural la definición de semejanza.

Definición. Una matriz A ser dirá semejante a B si y sólo si representan la misma transformación lineal.

Ejercicio. Demuestre que A es semejante a B si y soló si existen matrices invertibles P y Q tales que $A = QBP$.

Por último veamos el caso particular donde estudiamos las transformaciones $T : U \to U$ y queremos cambiar la matriz representante $M_{\beta\beta}(T)$ a la matriz $M_{\beta'\beta'}(T)$, viendo el diagrama conmutativo tenemos:

$$\begin{tikzcd} U_\beta \arrow[r, "T"'] & T(U)_\beta \arrow[d, "Id^{-1}"] \\ U_{\beta'} \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "T"'] & T(U)_{\beta'} \end{tikzcd}$$

La particularidad de este caso, es que hay que calcular solo una matriz de cambio de base, pues la otra matriz será simplemente su inversa. Nuevamente, esto hace nacer de manera natural la definición de similaridad.

Definición. Una matriz A se dirá similar a B si y sólo si existe un T tal que $A = M_{\alpha\alpha}(T)$ y $B = M_{\beta\beta}(T)$.