MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Guía : Cónicas

15 de diciembre del 2016

P1. Demuestre que:

$$y = \frac{1}{x}$$

es una hipérbola.

Solución 1. Escribiendo la ecuación en forma matricial tenemos:

$$xy = 1 \implies \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Encontremos los valores propios:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} -x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -x \end{vmatrix} \\ &= x^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Notemos que como no nos interesa reconocer la rotación ni hay terminos lineales no es necesario calcular P. Haciendo el cambio de variables:

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P}_{z^t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underbrace{P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{z} = 1 \implies \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

Expandiendo la última ecuación vemos que:

$$-\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} = 1$$

De donde reconocemos la hipérbola.

P2. Grafique la siguiente cónica:

$$5x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$$

Solución 2. Escribiendo la ecuación de forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Veamos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 5-x & -2 \\ -2 & 5-x \end{vmatrix} \\ &= (5-x)^2 - 2^2 \\ &= (3-x)(7-x) \end{aligned}$$

De donde tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 7$. Los subespacios propios son:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} &= \mathrm{Ker}(A - 3I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x - 2y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

Una base ortonormal de este espacio es $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$. Para el otro espacio tenemos:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_2} &= \mathrm{Ker}(A - 7I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -2x - 2y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

Una base ortonormal de este espacio es $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$. Luego la matriz P será $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nuevamente haciendo el cambio de variables:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P}_{z^t} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \underbrace{P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{z} = 1 \implies \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

Expandiendo esto último tenemos que:

$$3u^2 + 7v^2 = 1 \implies \frac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

De donde sabemos que nuestra cónica es una elipse de semiejes $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{7}}$. Nos falta simplemente reconocer la rotación por la que pasó esta cónica. Esto se puede hacer de dos maneras.

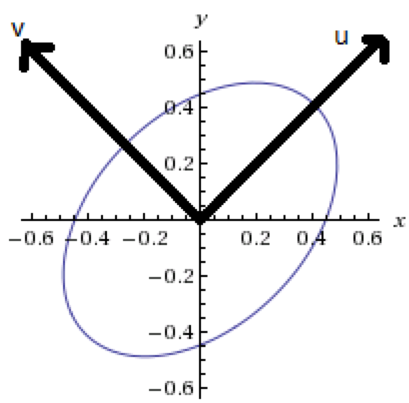
- **Forma 1:**
  Veamos donde están los vectores unitarios $\hat{u}$ y $\hat{v}$ con respecto a los ejes x e y. Para esto notemos que:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Haciendo lo mismo para $\hat{v}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\hat{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Notemos que una vez que tenemos los vectores unitarios tenemos los ejes u y v. Por tanto el grafico queda:



  Puesto que sabiamos que el semieje en u valía $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y el de v valía $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

- **Forma 2:**
  La segunda forma de reconocer la rotación efectuada por P es directamente ver que matriz de rotación es P. Las matrices de la forma:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

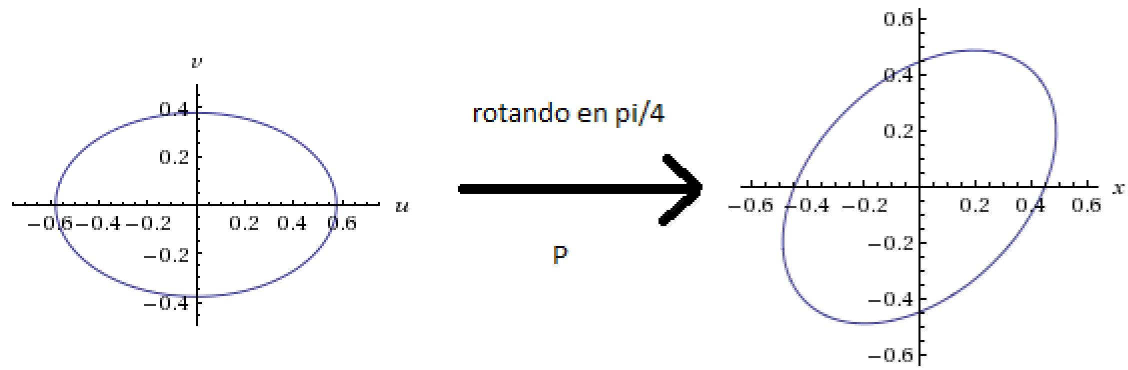
  rotan a los vectores por un ángulo θ. Notemos que:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

  Luego como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

  Basta con rotar la cónica en $\frac{\pi}{4}$ respecto a u y v para tenerla respecto a x e y.


v
0.4
0.2
−0.2
−0.4
u
−0.6 −0.4 −0.2 0.2 0.4 0.6
rotando en pi/4
P
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
x
−0.6 −0.4 −0.2 0.2 0.4 0.6

P3. Considere la párabola:

$$4x = y^2$$

Rotela $\frac{\pi}{3}$ radianes y luego trasladela según el vector $(1,5)^t$.

Solución 3. Escribiendolo en forma matricial tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Queremos que en nuestros nuevos ejes hayamos rotado en $\frac{\pi}{3}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{3}\right)^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Reemplazando esto nos queda:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{3}\right)^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{3}\right)^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 0 \\
\frac{3}{4}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}uv + \frac{1}{4}v^2 - 2u - 2\sqrt{3}v &= 0
\end{aligned}$$

Por último para trasladarla según $(1,5)^t$ basta con hacer el cambio de variables $u+1 = s$ y $v+5 = t$. Por tanto la ecuación de la cónica buscada era:

$$\frac{3}{4}(s-1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(s-1)(t-5) + \frac{1}{4}(t-5)^2 - 2(s-5) - 2\sqrt{3}(t-5) = 0$$

Desarrollando llegamos a:

$$3s^2 - 2\sqrt{3}st + (10\sqrt{3} - 14)s + t^2 - (6\sqrt{3} + 10)t + 30\sqrt{3} + 68 = 0$$

P4. Sea $a \in \mathbb{R}$ determine el conjunto solución de :

$$(a-1)x^2 + (a-1)y^2 + 2axy = -1$$

para distintos valores de a.

Solución 4. Escribiendo en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1$$

Calculando el polinomio característico tenemos:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} a-1-x & a \\ a & a-1-x \end{vmatrix} \\ &= (a-1-x)^2 - a^2 \\ &= (-1-x)(2a-1-x) \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2a-1$. Notemos que como no nos interesa reconocer la rotación ni hay terminos lineales no es necesario calcular P. Haciendo el cambio de variables:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P}_{z^t} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix} \underbrace{P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{z} = -1 \implies \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -1$$

Expandiendo tenemos:

$$-u^2 + (2a-1)v^2 = -1$$

De aquí tenemos los siguientes casos:

- Si $a = 0$ la ecuación es $u^2 + v^2 = 1$. En este caso la solución es un círculo.
- Si $a = \frac{1}{2}$ la ecuación es $-u^2 = -1$ o $u = \pm 1$. De donde tenemos dos rectas paralelas.
- Si $a \in (-\infty, \frac{1}{2})$ tenemos que la ecuación es $u^2 + kv^2 = 1$, donde $k > 0$, por tanto la ecuación es una elipse.
- Si $a \in (\frac{1}{2}, \infty)$ tenemos que la ecuación es $u^2 + kv^2 = 1$, con $k < 0$, donde vemos que es una hipérbola.

P5. Sea $a \in \mathbb{R}$ determine el conjunto solución de :

$$ax^2 + ay^2 + 2axy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$$

para distintos valores de a.

Solución 5. Escribiendo en forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Calculemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} a-x & a \\ a & a-x \end{vmatrix} \\ &= (a-x)^2 - a^2 \\ &= -x(2a-x) \end{aligned}$$

De donde tenemos los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2a$. Supongamos $a \neq 0$, luego:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} &= \mathrm{Ker}(A) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + ay = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\lambda_2} &= \mathrm{Ker}(A - 2aI) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -ax + ay = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

Luego la matriz P será:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que la diagonalización $A = PDP^t$ vale incluso cuando $a = 0$. Haciendo el cambio de variables tenemos :

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{(x,y)^t} = 0$$

Expandiendo lo anterior tenemos:

$$2au^2 + 2v = 0$$

Lo que es una parabola para todo $a \neq 0$, cuando $a = 0$ lo anterior es una recta.