MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 14 : Repaso C3

14 de diciembre del 2016

P0. [Gram-Schimdt]
Sea:

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Encuentre una base ortonormal de W.

Solución 1. Ocuparemos el método de Gram-Schmidt, nombremos el conjunto generador como $\{x_1, x_2, x_3\}$. Normalizando el primer vector:

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$y_2 = x_2 - P_{\langle\{\tilde{y}_1\}\rangle}(x_2) = x_2 - \langle \tilde{y}_1, x_2 \rangle \tilde{y}_1$$

Reemplazando:

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalizando nos queda:

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si bien podríamos continuar y tomar y_3 como:

$$y_3 = x_3 - P_{\langle\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2\}\rangle}(x_3) = x_3 - \langle \tilde{y}_1, x_3 \rangle \tilde{y}_1 - \langle \tilde{y}_2, x_3 \rangle \tilde{y}_2$$

Basta con notar que $x_3 = 3x_1 + 2x_2$, es decir el x_3 ya lo estamos generando. Luego la base ortonormal de W sería:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Obs : Si uno siguiera con el algoritmo daría $y_3 = 0$ y por tanto el vector y_3 sería descartado, lo que es el mismo resultado.

P1. [Diagonalización Ortogonal]
Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Argumente que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Calcule $p_A(x)$.

b) Diagonalice A, es decir escriba A de la forma $A = PDP^{-1}$.

c) ¿Puede diagonalizar A de manera que P sea unitaria?

d) ¿Es A invertible?

Solución 2.

a) A es diagonalizable pues es simétrica, más aún A es ortogonalmente diagonalizable. Calculemos $p_A(x)$:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)^3 + 1 + 1 - 3(2-x) \\ &= 8 - 12x + 6x^2 - x^3 + 2 - 6 + 3x \\ &= -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 \\ &= -(x-1)(x^2 - 5x + 4) \\ &= -(x-1)(x-1)(x-4) \end{aligned}$$

Donde la factorización se logra notando que $x = 1$ es raíz y dividiendo polinomios.

b) De lo anterior vemos que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ son los valores propios, recordemos además que para que P sea unitaria basta con elegir las columnas de P como vectores ortonormales (esto siempre se puede hacer cuando P es simétrica). Calculemos los espacios propios:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} &= \text{Ker}(A - I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z \; = \; 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& -x-y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Notemos que una base de este espacio es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lamentablemente esto no nos sirve pues esta base no es ortonormal, una forma de encontrar una base ortonormal es aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt al conjunto anterior, otra forma es notar que W_{λ_1} es un plano de ecuación normal:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Notemos entonces que pertenecer al plano es lo mismo que ser ortogonal a $(1,1,1)^t$, entonces para obtener un vector ortogonal a $(1,0-1)^t$ y que pertenezca al plano basta con que sea ortogonal a $(1,1,1)^t$ y a $(1,0-1)^t$, además sabemos que el producto cruz satisface esto:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego basta con normalizar y obtenemos la base ortonormal deseada:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Continuemos con el segundo espacio:

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_2} &= \operatorname{Ker}(A - 4I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} -2x + y + z &=& 0 \\ x - 2y + z &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& x \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Una base ortonormal de este espacio es:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Obs: Notemos que este último espacio no era necesario calcularlo pues sabíamos de la parte anterior que $(1,1,1)^t$ *era ortogonal a los otros vectores y sabíamos que existía base ortonormal de vectores propios (pues* A *era simétrica).*

Luego nuestra diagonalización ortonormal será:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}_{P^t}$$

c) A es invertible pues tiene solo valores propios positivos y por tanto $|A| \neq 0$. Otra forma de verlo es que:

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^t$$

es tal que $AB = I$.