MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 14 : Repaso C3

14 de diciembre del 2016

Recordemos:

- **Alg. Gram-Schmidt:** Recibe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$
  1. $\tilde{y}_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
  2. $y_k = x_k - P_{\langle\{\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{k-1}\}\rangle}(x_k)$
     Si $y_k = 0$ descartarlo, sino: $\tilde{y}_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$
  3. Devolver los $\tilde{y}_k$ que no descartamos, esto será base ortonormal de $\langle\{x_1, \ldots, x_m\}\rangle$.

P0. [Gram-Schimdt]
Sea:

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Encuentre una base ortonormal de W.

P1. [Diagonalización Ortogonal]
Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Argumente que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Calcule $p_A(x)$.
b) Diagonalice A, es decir escriba A de la forma $A = PDP^{-1}$.
c) ¿Puede diagonalizar A de manera que P sea unitaria?
d) ¿Es A invertible?

P2. [P3 Control 3 2014-β]
Considere $\mathbb{C}^2$ como un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación lineal dada por:

$$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 - iz_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

Sean $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases de $\mathbb{C}^2$.

a) Calcule la matriz representante de la transformación lineal T_{BB}.
b) Calcule usando *a*) y matrices de cambio de base, las matrices representantes de la transformación lineal, $T_{B'B}$, $T_{BB'}$ y $T_{B'B'}$.

P3. [P3 Control 3, Año 2008]

a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Si A es invertible, muestre que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.
b) Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable, pruebe que si A tiene un sólo valor propio, entonces $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
c) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable tal que $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$. Demuestre que $A = 0$.
d) Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal, pruebe que A^t es diagonalizable y que las columnas de $(P^t)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^t.