MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Resumen C3

Teo: Toda transformación lineal $T : U \to V$ queda determinada por su acción sobre bases. Es decir si:

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} v_i$$

Donde $u_j \in \beta_U$ y $v_i \in \beta_V$ son elementos de la base de U y V respectivamente. A la matriz

$$(M_{\beta_U,\beta_V}(T))_{ij} = a_{ij}$$

la llamaremos matriz representante de la transformación lineal.

Def: Sean U y V dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, definimos el siguiente espacio vectorial (con las operaciones suma y composición):

$$\mathcal{L}(U,V) = \{T : U \to V : T \text{ es lineal}\}$$

Pro: Si $\dim U = p$ y $\dim V = q$, entonces tenemos $\mathcal{L}(U,V) \cong \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

Pro: Sean $M_{\beta_V\beta_W}(L)$ y $M_{\beta_U\beta_V}(T)$ matrices representantes de las transformaciones L y T, entonces :

$$M_{\beta_U\beta_V}(L \circ T) = M_{\beta_V\beta_W}(L) M_{\beta_U\beta_V}(T)$$

Pro: T es invertible si y sólo si $M_{BB'}(T)$ lo es, en dicho caso:

$$M_{BB'}(T^{-1}) = M_{BB'}(T)^{-1}$$

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Las siguientes son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definida por $T_A(x) = Ax$ es biyectiva.
3. El conjunto $\{A_{\bullet j}\}_{j=1}^n$ es base de $\mathbb{K}^n$.

Def: Diremos que dos matrices A y B son semejantes si existen P y Q invertibles tales que:

$$A = PBQ$$

Si ademas $Q = P^{-1}$ decimos que son similares.

Def: Definimos el rango de una matriz A como el rango de la función T_A definida como:

$$T_A(x) = Ax$$

Pro: El rango(A) es igual a la cantidad de filas l.i. que tiene A.

Pro: Dos matrices son semejantes si y sólo si tienen el mismo rango.

Def: Diremos que $x \in V$ es una vector propio de T si verifica:

1. $x \neq 0$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(x) = \lambda x$.

Al valor λ que verifica 2. lo llamaremos valor propio asociado a x.

Def: Definimos el determinante de A de la siguiente manera:

1. Si A es de 1×1, entonces $|A| = a_{11}$.
2. En general $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}|$

Pro: El determinante tiene muchas propiedades, entre las más importantes se encuentran:

1. El determinante es una función lineal de las filas.
2. Si B se obtiene permutando dos filas de A, entonces $|A| = -|B|$.
3. Sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A y N_σ el numero de permutaciones de filas usadas al escalonar A. Entonces:
$$|A| = (-1)^{N_\sigma} \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii}$$
4. A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$.
5. $|AB| = |A||B|$
6. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ y $|A^t| = |A|$.

Def: Definimos el polinomio característico de una matriz A como $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$

Def: Diremos que λ_0 es valor propio de A si $p_A(\lambda_0) = 0$.

Pro: λ es valor propio de A si y solo si es valor propio de las transformaciones asociadas a A

Pro: Para todo valor propio definimos el espacio propio como

$$W_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

Los $x \in W_\lambda$ son justamente los vectores propios asociados a λ.

Def: Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si existen matrices $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

con P invertible y D diagonal. Además esto se hace de manera la matriz D contiene los valores propios en la diagonal y que las columnas de P sean tanto vectores propios de A como una base de $\mathbb{K}^n$.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A definimos la multiplicidad algebraica de λ (que llamaremos $\alpha(\lambda)$) como la mayor potencia de $(x-\lambda)$ que divide a p_A.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Definimos la multiplicidad geométrica de λ como:

$$\gamma(\lambda) = \dim(W_\lambda)$$

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Luego:

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n$$

Teo: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces las siguientes son equivalentes.

1. A es diagonalizable.
2. A es similar a una matriz diagonal.
3. $p_A(x)$ se factoriza completamente en factores lineales y para todo valor propio λ tenemos que $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$.
4. Existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.
5. Sea $\sigma(A)$ el conjunto de valores propios de A, entonces:
$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \gamma(\lambda) = n$$
6. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ser diagonalizable equivale a que para todo valor propio $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$.

Pro: Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

Def: Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

Def: Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá ortonormal si es ortogonal y $\|v_i\| = 1$, $\forall i$.

Pro: Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortonormal de W, entonces:

1. Si $x \in W$:
$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$$
2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ definimos:
$$P_W(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$$
Luego $(x - P_W(x)) \perp w$ para todo $w \in W$. En particular:
$$d(x, P_W(x)) = \min_{w \in W} d(x, w)$$
Además $P_W(x)$ es el único elemento que minimiza la distancia anterior. Por último $P_W(x)$ es una función lineal en x.

Def: Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ s.e.v. definimos el ortogonal de W como:

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle w, u \rangle, \forall w \in W\}$$

Def: Tenemos las siguientes propiedades del ortogonal:

1. $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.
3. $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$.

Teo: **de Gram-Schmidt** Todo $U \subseteq R^n$ s.e.v. tiene una base ortonormal.

Alg: **de Gram-Schmidt** Recibe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$

1. $\tilde{y}_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
2. $y_k = x_k - P_{\langle \{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{k-1}\} \rangle}(x_k)$
Si $y_k = 0$ descartarlo, sino: $\tilde{y}_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$
3. Devolver los $\tilde{y}_k$ que no descartamos, esto será base ortonormal de $\langle \{x_1, \ldots, x_m\} \rangle$.

Def: Dados $u, v \in \mathbb{C}^n$ definimos el producto Hermítico por:

$$\langle u, v \rangle_H = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}$$

Las propiedades clásicas del producto interno tienen su versión para el producto hermítico.

Pro: $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es simétrica si y sólo si $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$.

Def: Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$, definimos la adjunta A^* por:

$$(a^*)_{kl} = \overline{a_{lk}}$$

Diremos que A es hermítica si $A = A^*$.

Def: Definimos el espectro de $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ (o en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$) por:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p_A(\lambda) = 0\}$$

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ hermítica, entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Pro: Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ es hermítica y v_1, v_2 son dos vectores propios que provienen de distinto subespacios propios, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle_H = 0$.

Pro: Sea W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tal que $\dim W \geq 1$ y $L : W \to W$ ñineal, simétrica, entonces existe una base ortonormal de W de vectores propios de L.

Def: Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, tal que $PP^t = I$ diremos que P es ortogonal o unitaria.

Teo: Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A es diagonalizable con P ortogonal.