MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 13 : Ortogonalidad

5 de diciembre del 2016

Recordemos:

- Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.
- Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá ortonormal si es ortogonal y $\|v_i\| = 1$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.
- Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortonormal de W, entonces:
  1. Si $x \in W$:
  $$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$$
  2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ definimos:
  $$P_W(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$$
  Luego $(x - P_W(x)) \perp w$ para todo $w \in W$. En particular:
  $$d(x, P_W(x)) = \min_{w \in W} d(x, w)$$
  Además $P_W(x)$ es el único elemento que minimiza la distancia anterior. Por último $P_W(x)$ es una función lineal en x.
- Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ s.e.v. definimos el ortogonal de W como:
$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle w, u \rangle = 0, \forall w \in W\}$$
- Tenemos las siguientes propiedades del ortogonal:
  1. $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
  2. $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.
  3. $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$.
- **Teo. de Gram-Schmidt:** Todo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ s.e.v. tiene una base ortonormal.
- **Alg. Gram-Schmidt:** Recibe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$
  1. $\tilde{y}_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
  2. $y_k = x_k - P_{\langle \{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{k-1}\} \rangle}(x_k)$
  Si $y_k = 0$ descartarlo, sino: $\tilde{y}_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$
  3. Devolver los $\tilde{y}_k$ que no descartamos, esto será base ortonormal de $\langle \{x_1, \ldots, x_m\} \rangle$.
- Dados $u, v \in \mathbb{C}^n$ definimos el producto Hermítico por:
$$\langle u, v \rangle_H = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}$$
Las propiedades clásicas del producto interno tienen su versión para el producto hermítico.
- $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es simétrica si y sólo si $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$.
- Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$, definimos la adjunta A^* por:
$$(a^*)_{kl} = \overline{a_{lk}}$$
Diremos que A es hermítica si $A = A^*$.
- Definimos el espectro de $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ (o en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$) por:
$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p_A(\lambda) = 0\}$$

P1. [Varios]

a) Demuestre que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

b) Demuestre que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ verifica $AA^* = A^*A$, entonces $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

c) Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ espacios vectoriales. Demuestre que:

1) $(U^\perp)^\perp = U$.
2) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$. Concluya que $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.
3) Use las partes anteriores para concluir que $U \oplus V = \mathbb{R}^n \iff U^\perp \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$.

P2. [Diagonalización Ortogonal]
Una matriz P se dirá ortogonal si $PP^t = I$.

a) Demuestre que si P es ortogonal, entonces $\det(P) \in \{-1, 1\}$.

b) Demuestre que una matriz es ortogonal si y sólo si sus columnas son ortonormales.

c) Escriba la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de la forma $A = PDP^t$, donde P es invertible y D diagonal.

P3. [P3 Control 3, Año 2008-β]
Sean W y B dos s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y $P : \mathbb{R}^n \to W$ la proyección ortogonal sobre W.

a) Muestre que $P(B)$ es un s.e.v. de W y que si $\{b_1, \ldots, b_k\}$ es un generador de B entonces $\{P(b_1), \ldots, P(b_k)\}$ es un generador de $P(B)$.

b) Suponga ahora que:

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad B = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

1) Encuentre una base ortonormal de W y explicite su dimensión.
2) Encuentre una base ortonormal de $W^\perp$ y explicite su dimensión.
3) Encuentre una base de $P(B)$ y explicite su dimensión.

P4. [Matrices Ortogonales]
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ demuestre que A es ortogonal si y sólo si:

- $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $\|Ax\| = \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Más aún si $n = 2$ demuestre que una matriz es ortogonal si y sólo si es de alguna de las siguientes formas:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

P5. [P2 Control 3, Año 2014]
Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Determine el polinomio característico de A y verfique que $\lambda = 1$ es uno de sus valores propios.

b) Determine los valores y vectores propios de A. ¿Es A invertible?

c) Construya una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

d) Diagonalice A y A^{-1} de ser posible.