MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor : Mauricio Telias H.
Auxiliar : Arturo Merino F.

Pauta 12 : Diagonalización, Valores y Vectores Propios

28 de noviembre del 2016

P1. [Varios]
Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que A y B son diagonalizables y diagonalicelas.

b) Encuentre C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Determine si D y E son diagonalizables.

Obs: La pregunta original pedía calcular todos los valores y vectores propios al principio, para tener una presentación más ordenada aca se calculan cuando se necesitan.

Solución 1.

a) Calculemos el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)[(1-x)^2 - 1] \\ &= -x(1-x)(2-x) \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ como tenemos n valores propios distintos la matriz es diagonalizable. Veamos los subespacios propios:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_0} &= \mathrm{Ker}(A) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y+z &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_0 = (0,1,-1)^t$.

$$\begin{array}{rcl} W_{\lambda_1} & = & \operatorname{Ker}(A-I) \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{array}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_1 = (1,0,0)^t$.

$$\begin{array}{rcl} W_{\lambda_2} & = & \operatorname{Ker}(A-2I) \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} -x & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \end{array} \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R} \right\} \end{array}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_2 = (0,1,1)^t$. Como A es diagonalizable $A = PDP^{-1}$ con P con una base de vectores propios como columnas y D diagonal con los valores propios. Luego:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calculemos el polinomio característico de B:

$$\begin{array}{rcl} p_B(x) & = & \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 2 & -4 & 2-x \end{vmatrix} \\ & = & -\begin{vmatrix} 0 & 3-x & 0 \\ 1-x & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2-x \end{vmatrix} \\ & = & (3-x)(1-x)(2-x) \end{array}$$

Luego los valores propios son $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Calculemos los subespacios propios:

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_0} &= \operatorname{Ker}(B - I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} 2y &=& 0 \\ 2x - 4y + z &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} y &=& 0 \\ z &=& -2x \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_0 = (1, 0, -2)^t$.

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_1} &= \operatorname{Ker}(B - 2I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} -x + 2y &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_1 = (0, 0, 1)^t$.

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_2} &= \operatorname{Ker}(B - 3I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} -2x + 2y &=& 0 \\ 2x - 4y - z &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x &=& y \\ -2x &=& z \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_2 = (1, 1, -2)^t$. Luego:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

b) Calculemos el polinomio característico de C:

$$\begin{aligned} p_C(x) &= \begin{vmatrix} a-x & b-a \\ 0 & b-x \end{vmatrix} \\ &= (a-x)(b-x) \end{aligned}$$

Luego los valores propios de C son $\lambda_0 = a$ y $\lambda_1 = b$. Supongamos $a \neq b$ (pues así nos aseguramos que la matriz es diagonalizable), calculemos los subespacios propios:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_0} &= \operatorname{Ker}(A - aI) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 0 & b-a \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Un vector propio de este espacio es $v_0 = (1, 0)^t$.

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} &= \operatorname{Ker}(A - bI) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(a-b)}_{\neq 0} x + \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Un vector propio de este espacio es $v_1 = (1, 1)^t$. Luego si $a \neq b$

$$\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a^k & b^k - a^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde vemos que la fórmula anterior cubre también el caso $a = b$.

c) Calculemos el polinomio característico de D:

$$\begin{aligned} p_D(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)^2 \end{aligned}$$

Tenemos un sólo valor propio $\lambda = 2$ que tiene $\alpha(\lambda) = 2$, recordemos que para que la matriz sea diagonalizable necesitamos que $\gamma(\lambda) = 2$. Veamos el espacio propio:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_0} &= \text{Ker}(D - 2I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

De donde vemos que $\gamma(\lambda) = 1$ y por tanto la matriz no es diagonalizable.
Calculemos el polinomio característico de E:

$$\begin{aligned} p_E(x) &= \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Notemos que este polinomio no se puede factorizar linealmente en $\mathbb{R}$ por lo que la matriz no es diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero $p_E(x) = (x+i)(x-i)$ en $\mathbb{C}$, es decir en $\mathbb{C}$ tenemos dos valores propios distintos y por tanto la matriz es diagonalizable.

P2. [Determinante y Traza]
Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ los n valores propios de una matriz A (incluyendo repeticiones). El objetivo de este problema es demostrar que:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

a) Demuestre lo pedido para el caso diagonalizable.

b) Demuestre que $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.
Hint: Examine $p_A(x)$.

c) Pruebe que:
$$p_A(x) = (-1)^n(x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \dots)$$

d) Concluya que $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Obs: En la auxiliar sólo estaba el caso diagonalizable. Para el caso no diagonalizable (parte b, c y d) se puede ver como se complican las cosas.

Solución 2.

a) Notemos que si A es diagonalizable $A = PDP^{-1}$ donde
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Luego:
$$\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P)^{-1} = \det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

y por otro lado:
$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(PDP^{-1}) = \operatorname{tr}([PD]P^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PD) = \operatorname{tr}(D) = \sum i = 1^n \lambda_i$$

b) Trabajemos primero $p_A(x)$. Notemos que:
$$p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$$

Por otra parte sabemos que $p_A(x)$ se factoriza de la siguiente forma:
$$p_A(x) = c_n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_n)$$

donde c_n es el coeficiente que acompaña al x^n en el polinomio caracteristico, luego $p_A(0) = c_n(-1)^n \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.
Calculemos c_n, para ahorrar notación definamos $B = A - xI$

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |B| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - x)|B_{11}| + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |B_{1j}|}_{\text{Grado} \leq n-2} \end{aligned}$$

De esto vemos que el coeficiente que acompaña a x^n esta en la primera parte de la suma. Notemos que podemos seguir expandiendo esto y repetir el argumento anterior:

$$
\begin{aligned}
&= (a_{11}-x)|B_{11}| + \underbrace{\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|B_{1j}|}_{q_1(x)} \\
&= (a_{11}-x)|B_{11}| + q_1 \\
&= (a_{11}-x)(a_{22}-x)|(B_{11})_{11}| + \underbrace{\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{2,j+1}|(B_{11})_{1j}|}_{q_2} + q_1 \\
&\vdots \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}_{\text{grado} \leq n-2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

De esto podemos ver que el coeficiente que acompaña a x^n es $(-1)^n$. Luego:

$$\det(A) = p_A(0) = c_n(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

c) Retomando el calculo anterior desde (1) vemos que:

$$
\begin{aligned}
p_A(x) &= \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-x) + \sum_{i=1}^{n-1} q_i \\
&= (-1)^n\left(x^n - \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right]}_{\mathrm{tr}(A)} x^{n-1} + \dots\right) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}_{\text{grado} \leq n-2} \\
&= (-1)^n(x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \dots)
\end{aligned}
$$

d) Notemos que:

$$
\begin{aligned}
p_A(x) &= c_n\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i) \\
&= (-1)^n\left(x^n - \left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right]x^{n-1} + \dots\right)
\end{aligned}
$$

Igualando coeficientes con la parte *c*) tenemos que:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

P3. [P1 Control 3, Año 2015-β]
Demuestre las siguientes afirmaciones para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

a) A es invertible si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

b) Si A es invertible y $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A, entonces v es un vector propio de A^{-1}.

c) Si n es impar, entonces A admite un valor propio real.

d) Si v es el vector propio asociado al valor propio λ. entonces también es vector propio asociado a λ^k de la matriz A^k.

Solución 3.

a) Tenemos las siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 \text{ no es un valor propio de } A &\iff \lambda = 0 \text{ no es cero del polinomio carácteristico de } A \\
&\iff p_A(0) \neq 0 \\
&\iff |A - 0 \cdot I| \neq 0 \\
&\iff |A| \neq 0 \\
&\iff A \text{ es invertible.}
\end{aligned}$$

b) Sabemos que v es vector propio de un valor propio $\lambda \neq 0$ (pues A es invertible). Esto es:

$$\begin{aligned}
Av &= \lambda v && /A^{-1}\cdot \\
A^{-1}Av &= \lambda A^{-1}v \\
v &= \lambda A^{-1}v && / \cdot \frac{1}{\lambda} \\
\frac{1}{\lambda}v &= A^{-1}v
\end{aligned}$$

De esto se concluye que v es vector propio de A con valor propio asociado $\frac{1}{\lambda}$.

c) Notemos que si n es impar, entonces el polinomio carácteristico de A al tener grado n también tiene grado impar. Notemos además que las raíces no reales de un polinomio vienen de a dos, es decir, si z es raiz de p entonces $\overline{z}$ también, luego no es posible que p_A no tenga raices reales.

d) Razonemos por inducción:

- **Caso Base:** $(k = 1)$
  Por hipotésis $Av = \lambda v$.
- **Hipotésis Inductiva:**
  v es valor propio de A^k con valor propio λ^k asociado. Esto es $A^k v = \lambda^k v$.
- **Paso Inductivo:** $(k + 1)$
  Notemos que:
  $$A^{k+1}v = A(A^k)v \underbrace{=}_{\text{H.I.}} A\lambda^k v = \lambda^k Av = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v$$

P4. [P3 Control 3, Año 2009]

a) Completar los elementos faltantes de la matriz $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ - & - \end{pmatrix}$$

de modo que admita a $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y a $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vectores propios.

b) Encuentre una matriz $B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ con los mismos vectores propios v_1 y v_2 del punto *a*) y valores propios $\lambda_1 = 1$ asociado a v_1 y $\lambda_2 = 0$ asociado a v_2. Calcule además, B^{10}.

Solución 4.

a) Pongamosle nombre a las coordenadas que faltan, en particular:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como v_1 es vector propio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rcl} 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 & = & 3\lambda \\ 3c + d & = & \lambda \end{array}$$

De esto sabemos que $\lambda = 4$. Haciendo lo mismo para v_2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rcl} 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & = & 2\mu \\ 2c + d & = & \mu \end{array}$$

De esto sabemos que $\mu = 5$. Ahora tenemos dos ecuaciones para c y d:

$$\begin{array}{rcl} 3c + d & = & 4 \\ 2c + d & = & 5 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} c & = & -1 \\ d & = & 7 \end{array}$$

b) Notemos que la matriz B es diagonalizable, pues $(3,1)^t$ y $(2,1)^t$ es una base de vectores propios de $\mathbb{R}^2$. Luego:

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Para invertir matrices de 2×2 puede ser útil la siguiente fórmula:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \implies X^{-1} = \frac{1}{|X|}\begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Terminando nuestro calculo:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para calcular B^{10} notemos que:

$$B^{10} = (PDP^{-1})^{10} = \underbrace{PDP^{-1}\cdots PDP^{-1}}_{\text{10 veces}} = PD^{10}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 0^{10} \end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1} = B$$

P5. [Fórmula de Cayley-Hamilton para inversas]
El objetivo de este problema es demostrar que si A es invertible:

$$A^{-1} = \frac{-1}{\det(A)}(c_n A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1 I)$$

donde los c_i son los coeficientes del polinomio característico $p_A(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. Demostraremos el caso particular cuando A es diagonalizable, para esto se propone lo siguiente:

a) Demuestre que $c_0 = \det(A)$.

b) Sea $A = PDP^{-1}$. Demuestre que:

$$p_A(D) = c_n D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1 D + c_0 I = 0$$

c) Demuestre que $p_A(A) = 0$.

d) Concluya.

Solución 5.

a) Notemos que:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A - 0I) \\ &= p_A(0) \\ &= c_0 \end{aligned}$$

b) Recordemos que D contiene a los valores propios en la diagonal, esto es:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} p_A(D) &= c_n D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1 D + c_0 I \\ &= c_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^n + c_{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^{n-1} + \cdots + c_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_n\lambda_1^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_n\lambda_n^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{n-1}\lambda_1^{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_1\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_1\lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_n\lambda_1^n + \cdots + c_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_n\lambda_n^n + \cdots + c_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_A(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) Notemos que $A^k = PD^kP^{-1}$. Aplicando esto:

$$\begin{aligned}
p_A(A) &= c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I \\
&= c_nPD^nP^{-1} + c_{n-1}PD^{n-1}P^{-1} + \cdots + c_1PDP^{-1} + c_0PIP^{-1} \\
&= P(c_nD^nP^{-1} + c_{n-1}D^{n-1}P^{-1} + \cdots + c_1DP^{-1} + c_0IP^{-1}) \\
&= P(c_nD^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1D + c_0I)P^{-1} \\
&= P\underbrace{p_A(D)}_{=0}P^{-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d) Trabajemos la igualdad a la que llegamos:

$$\begin{aligned}
0 &= c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I \\
-c_0I &= c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A \\
-c_0A^{-1} &= c_nA^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1I \\
A^{-1} &= \frac{-1}{c_0}(c_nA^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1I) \\
A^{-1} &= \frac{-1}{\det(A)}(c_nA^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1I)
\end{aligned}$$

Que era lo pedido.

P6. [P3 Control 3, Año 2008]

a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Si A es invertible, muestre que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

b) Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable, pruebe que si A tiene un sólo valor propio, entonces $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable tal que $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$. Demuestre que $A = 0$.

d) Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal, pruebe que A^t es diagonalizable y que las columnas de $(P^t)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^t.

Solución 6.

a) Trabajando el polinomio cárácteristico tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{AB}(x) &= |AB - \lambda I| \\ &= |AB - \lambda AA^{-1}| \\ &= |A(B - \lambda A^{-1})| \\ &= |A||B - \lambda A^{-1}| \\ &= |B - \lambda A^{-1}||A| \\ &= |(B - \lambda A^{-1})A| \\ &= |BA - \lambda I| \\ &= p_{BA}(x) \end{aligned}$$

b) Notemos que si lambda tiene un sólo valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \alpha$. Por tanto:

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P(\alpha I)P^{-1} = \alpha PP^{-1} = \alpha I$$

Que era lo pedido.

c) Recordando que A era diagonalizable:

$$\begin{aligned} A^k &= 0 \\ PD^kP^{-1} &= 0 && / \cdot P \\ PD^k &= 0 && /P^{-1} \cdot \\ D^k &= 0 \\ \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ y por tanto:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Con esto concluimos que $A = PDP^{-1} = P0P^{-1} = 0$.

d) Notemos que:

$$A = PDP^{-1} \implies A^t = (P^{-1})^t DP^t = (P^t)^{-1} D((P^t)^{-1})^{-1}$$

De donde vemos que A es diagonalizable, además las columnas de $(P^t)^{-1}$ deben ser una base de vectores propios de A^t por como es la descomposición de la diagonalización.