MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor : Mauricio Telias H.
Auxiliar : Arturo Merino F.

Auxiliar 12 : Diagonalización, Valores y Vectores Propios

28 de noviembre del 2016

Recordemos:

- Diremos que $x \in V$ es una vector propio de T si verifica:
  1. $x \neq 0$
  2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(x) = \lambda x$.

  Al valor λ que verifica 2. lo llamaremos valor propio asociado a x.
- Definimos el polinomio característico de una matriz A como $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$
- Diremos que λ_0 es valor propio de A si $p_A(\lambda_0) = 0$.
- Para todo valor propio definimos el espacio propio como
$$W_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$$
  Los $x \in W_\lambda$ son justamente los vectores propios asociados a λ.
- Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si existen matrices $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:
$$A = PDP^{-1}$$
  con P invertible y D diagonal. Además esto se hace de manera la matriz D contiene los valores propios en la diagonal y que las columnas de P sean tanto vectores propios de A como una base de $\mathbb{K}^n$.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A definimos la multiplicidad algebraica de λ (que llamaremos $\alpha(\lambda)$) como la mayor potencia de $(x - \lambda)$ que divide a p_A.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Definimos la multiplicidad geométrica de λ como:
$$\gamma(\lambda) = \dim(W_\lambda)$$
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Luego:
$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n$$
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces las siguientes son equivalentes.
  1. A es diagonalizable.
  2. A es similar a una matriz diagonal.
  3. $p_A(x)$ se factoriza completamente en factores lineales y para todo valor propio λ tenemos que $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$.
  4. Existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.
  5. Sea $\sigma(A)$ el conjunto de valores propios de A, entonces:
$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \gamma(\lambda) = n$$
  6. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ser diagonalizable equivale a que para todo valor propio $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

P1. [Varios]
Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre valores y vectores propios para A, B, C, D, y E.

b) Demuestre que A y B son diagonalizables y diagonalicelas.

c) Encuentre C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

d) Determine si D y E son diagonalizables.

P2. [Suma y Producto de Valores Propios]

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ los n valores propios de una matriz diagonalizable A (incluyendo repeticiones). Demuestre que:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Obs: Este resultado vale también para el caso no diagonalizable.

P3. [P1 Control 3, Año 2015-β]
Demuestre las siguientes afirmaciones para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

a) A es invertible si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

b) Si A es invertible y $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A, entonces v es un vector propio de A^{-1}.

c) Si n es impar, entonces A admite un valor propio real.

d) Si v es el vector propio asociado al valor propio λ. entonces también es vector propio asociado a λ^k de la matriz A^k.

P4. [P3 Control 3, Año 2009]

a) Completar los elementos faltantes de la matriz $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ - & - \end{pmatrix}$$

de modo que admita a $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y a $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vectores propios.

b) Encuentre una matriz $B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ con los mismos vectores propios v_1 y v_2 del punto *a*) y valores propios $\lambda_1 = 1$ asociado a v_1 y $\lambda_2 = 0$ asociado a v_2. Calcule además, B^{10}.

P5. [Fórmula de Cayley-Hamilton para inversas]
El objetivo de este problema es demostrar que si A es invertible:

$$A^{-1} = \frac{-1}{\det(A)}(c_n A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1 I)$$

donde los c_i son los coeficientes del polinomio característico $p_A(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. Demostraremos el caso particular cuando A es diagonalizable, para esto se propone lo siguiente:

a) Demuestre que $c_0 = \det(A)$.

b) Sea $A = PDP^{-1}$. Demuestre que:

$$p_A(D) = c_n D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1 D + c_0 I = 0$$

c) Demuestre que $p_A(A) = 0$.

d) Concluya.

P6. [P3 Control 3, Año 2008]

a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Si A es invertible, muestre que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

b) Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable, pruebe que si A tiene un sólo valor propio, entonces $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable tal que $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$. Demuestre que $A = 0$.

d) Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal, pruebe que A^t es diagonalizable y que las columnas de $(P^t)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^t.