MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 11 : Rango, Valores y Vectores Propios

27 de noviembre del 2016

P1. [Varios]

a) Muestre que si A y B son similares, entonces A^n y B^n son similares $\forall n \in \mathbb{N}$. Muestre que además A y B tienen la misma traza y el mismo determinante.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, pruebe que $\text{rango}(AB) \leq \text{mín}\{\text{rango}(A), \text{rango}(B)\}$. Suponga ahora que A es invertible, demuestre que $\text{rango}(AB) = \text{rango}(B)$.

c) Encuentre el polinomio característico, valores propios y vectores propios para la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución 1.

a) Notemos que si A y B son similares $A = PBP^{-1}$. Luego:

$$A^n = (PBP^{-1})^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})(PBP^{-1})}_{n \text{ veces}} = PB^nP^{-1}$$

Es decir A^n y B^n son similares. Veamos que A y B tienen la misma traza, demostremos primero que si $X, Y \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$, en efecto:

$$\text{tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n} (xy)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_{ki}x_{ik}}_{(yx)_{kk}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(yx)_{kk}}_{\text{tr}(YX)} = \text{tr}(YX)$$

Luego aplicando esta propiedad:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}([PB]P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr}(B)$$

Para ver que los determinantes de A y B son los mismo recordemos que el determinante es multiplicativo:

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(B)\frac{1}{\det(P)} = \det(B)$$

b) Notemos que basta con demostrar que $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A)$ y $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(B)$. Veamos que $T_{AB} = T_A \circ T_B$, luego:

$$\text{Im}(T_{AB}) = T_{AB}(\mathbb{R}^n) = T_A(\underbrace{T_B(\mathbb{R}^n)}_{\subseteq \mathbb{R}^n}) \subseteq T_A(\mathbb{R}^n) = \text{Im}(T_A)$$

Tomando dimensión a ambos lados concluimos que $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A)$. Para concluir la otra desigualdad notemos que:

$$\begin{aligned} \text{rango}(AB) &= \text{rango}((AB)^t) \\ &= \text{rango}(B^tA^t) \\ &\leq \text{rango}(B^t) \\ &= \text{rango}(B) \end{aligned}$$

Donde ocupamos la desigualdad que ya habíamos probado. Para ver la segunda propiedad notemos que podemos ocupar la misma idea de separar T_{AB} como $T_A \circ T_B$, sólo que esta vez sabemos que T_A es biyectiva. Luego $f : T_B(\mathbb{R}^n) \to T_{BA}(\mathbb{R}^n)$

$$f(x) = T_A(x)$$

es una biyección lineal y por tanto un isomorfismo, es decir $T_B(\mathbb{R}^n) \cong T_{BA}(\mathbb{R}^n)$. Concluimos que $\dim(T_B(\mathbb{R}^n)) = \dim()T_{BA}(\mathbb{R}^n))$ y por tanto rango$(B) =$ rango(AB)

c) Calculemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= -x(1-x)^2 \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 = 1$. Para encontrar los vectores propios calculemos los subespacios propios:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_0} &= \operatorname{Ker}(A) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una base de este espacio (y por tanto vector propio) sería $v_0 = (1, -1, 0)^t$.
Veamos ahora el espacio W_{λ_1}.

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} &= \operatorname{Ker}(A - I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} y+z & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una base de este espacio es $(1, 0, 0)^t$.

P2. [Valores y vectores propios]

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$, encuentre los valores propios de A respecto a $\det A$ y $\operatorname{tr} A$.

b) Calcule valores y vectores propios de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Calcule valores y vectores propios de:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$$

Hint : Trate de escribir J de la forma $J = xx^t$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$ adecuado.

d) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $A^2 = -I$, muestre que n es par y además que A no tiene valores propios reales.

Solución 2.

a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2 arbitraria. Calculemos el polinomio característico

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI| \\ &= \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} \\ &= (a-x)(d-x) - cb \\ &= x^2 - \underbrace{(a+d)}_{\operatorname{tr}(A)} x + \underbrace{ad-cb}_{\det(A)} \\ &= x^2 - \operatorname{tr}(A) + \det(A) \end{aligned}$$

Luego los valores propios de A son:

$$\lambda = \frac{-\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

b) Calculemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -2 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1-x \\ -1 & 2-x & 1 \\ 1-x & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -\left(-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} + (-1-x) \begin{vmatrix} -1 & 2-x \\ 1-x & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 - (1-x) + (1+x)[-1-(2-x)(1-x)] \\ &= (1+x) + (1+x)[-1-(2-x)(1-x)] \\ &= -(1+x)(2-x)(1-x) \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Veamos los subespacios propios:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_0} &= \operatorname{Ker}(A+I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} 2x+y-2z &=& 0 \\ -x+3y+z &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_0 = (1,0,1)^t$.

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} &= \operatorname{Ker}(A-I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} y-2z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} y &=& 2z \\ x &=& 3z \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_1 = (3,2,1)^t$.

$$\begin{aligned} W_{\lambda_2} &= \operatorname{Ker}(A-2I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} -x+y-2z &=& 0 \\ -x+z &=& 0 \\ y-3z &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& 3z \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una vector propio de este espacio sería $v_1 = (1,3,1)^t$.

c) Notemos que:

$$xx^t = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_{n-1} & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_{n-1} & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}x_1 & x_{n-1}x_2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_{n-1}x_n \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_{n-1} & x_n^2 \end{pmatrix}$$

De esto notamos que $x = (1, \dots, 1)^t$ satisface $J = xx^t$. Veamos como se comporta Jv:

$$\begin{aligned} Jv &= (xx^t)v \\ &= x(x^tv) \\ &= x\langle x, v\rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^n v_i\right) x \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Recordemos que estabamos tratando de resolver $Jv = \lambda v$ (pues buscamos valores y vectores propios). Pongamonos en casos para distintos λ. Si $\lambda = 0$, tenemos que los vectores propios asociados son los que verifican $\sum_{i=1}^n v_i = 0$. Si $\lambda \neq 0$ tenemos la igualdad:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

De donde vemos que todos los v_i deben ser iguales, luego la igualdad nos queda:

$$\begin{pmatrix} nv_1 \\ \vdots \\ nv_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_1 \end{pmatrix}$$

Es decir $\lambda = n$ es un valor propio con vectores propios de la forma $(a, a, \dots, a)^t$.

d) Analizando el determinante tenemos:

$$0 \leq \det(A)^2 = \det(A^2) = \det(-I) = (-1)^n$$

Luego como $(-1)^n \geq 0$ tenemos que n es par. Sea ahora λ un valor propio y v un vector propio asociado a λ, entonces:

$$-v = -Iv = A^2v = A(Av) = A\lambda v = \lambda^2 v$$

Luego como $-v = \lambda^2 v$ y $v \neq 0$ tenemos que $\lambda^2 = -1$ y por tanto $\lambda \notin \mathbb{R}$.

P3. [P1 Control 3, Año 2015-β]
Demuestre las siguientes afirmaciones para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

a) A es invertible si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

b) Si A es invertible y $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A, entonces v es un vector propio de A^{-1}.

c) Si n es impar, entonces A admite un valor propio real.

d) Si v es el vector propio asociado al valor propio λ. entonces también es vector propio asociado a λ^k de la matriz A^k.

Solución 3.

a) Tenemos las siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \text{ no es un valor propio de } A &\iff \lambda = 0 \text{ no es cero del polinomio carácteristico de } A \\ &\iff p_A(0) \neq 0 \\ &\iff |A - 0 \cdot I| \neq 0 \\ &\iff |A| \neq 0 \\ &\iff A \text{ es invertible.} \end{aligned}$$

b) Sabemos que v es vector propio de un valor propio $\lambda \neq 0$ (pues A es invertible). Esto es:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v & /A^{-1}\cdot \\ A^{-1}Av &= \lambda A^{-1}v \\ v &= \lambda A^{-1}v & / \cdot \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda}v &= A^{-1}v \end{aligned}$$

De esto se concluye que v es vector propio de A con valor propio asociado $\frac{1}{\lambda}$.

c) Notemos que si n es impar, entonces el polinomio carácteristico de A al tener grado n también tiene grado impar. Notemos además que las raíces no reales de un polinomio vienen de a dos, es decir, si z es raiz de p entonces $\overline{z}$ también, luego no es posible que p_A no tenga raices reales.

d) Razonemos por inducción:

- **Caso Base:** $(k = 1)$
  Por hipotésis $Av = \lambda v$.
- **Hipotésis Inductiva:**
  v es valor propio de A^k con valor propio λ^k asociado. Esto es $A^k v = \lambda^k v$.
- **Paso Inductivo:** $(k + 1)$
  Notemos que:
  $$A^{k+1}v = A(A^k)v \underbrace{=}_{\text{H.I.}} A\lambda^k v = \lambda^k Av = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v$$

P4. [Determinantes]

a) Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es una matriz tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 0 \qquad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Entonces $\det(A) = 0$.

b) Demuestre que para $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x + y + z = 0 \implies x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

Hint : Use a) con una matriz A adecuada.

c) Alicia y Bob juegan un juego en el cual se toman turnos llenando los coeficientes de una matriz inicialmente vacía de 1102×1102. En cada turno, un jugador escoje un numero real y lo pone en un casillero vacío. Alicia gana si la matriz resultante es invertible, mientras que Bob gana si la matriz resultante no lo es.
Si Alicia tiene el primer turno, encuentre una estrategia tal que Bob siempre gane independiente de lo que haga Alicia.
Hint : Use a) de manera apropiada.

Solución 4.

a) Veamos primero que la condición que nos dice el enunciado es que la suma de cada columna es cero. Demostraremos que si una matriz satisface esto, entonces no es invertible. Sean f_i la fila $i-$esima de A. Notemos que:

$$f_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}}_{=0}, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}}_{=0}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{in}}_{=0} \right) = \vec{0}$$

Es decir las filas de A son linealmente dependientes, por tanto A no es invertible y $\det(A) = 0$.

b) Notemos que si $x + y + z = 0$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$$

Verifica que la suma de cada columna es 0, por tanto $\det(A)$ es 0. Calculando $\det(A)$ tenemos:

$$\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Despejando se concluye la igualdad pedida.

c) Notemos que si Alicia juega x en una columna y luego Bob juega $-x$ en la misma misma columna (Bob siempre puede pues las columnas son pares) en cada jugada Bob termina ganando, pues al final del juego la suma de los valores de las columnas da cero y por tanto la matriz no sería invertible.

P5. [P2 *a*) Control 3, Año 2012]
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada una de ellas calcule valores y vectores propios.

Solución 5. Comenzemos con A:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^3 \end{aligned}$$

Luego el único valor propio que se tiene es $\lambda = 1$. Veamos el espacio propio:

$$\begin{aligned} W_\lambda &= \mathrm{Ker}(A - I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una base de este espacio es $(1, 0, 0)^t$.

Para B tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} p_B(x) &= |B - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1-x & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1-x \\ 1-x & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x)[1^2 - (1-x)^2] \\ &= x(1-x)(2-x) \end{aligned}$$

Donde los valores propios son $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Calculemos los espacios propios:

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_0} &= \operatorname{Ker}(A) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{c} x + y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Una base de este espacio es $(1, -1, 0)^t$.

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_1} &= \operatorname{Ker}(A - I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{c} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Una base de este espacio es $(0, 0, 1)^t$.

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_2} &= \operatorname{Ker}(A - 2I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{c} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Una base de este espacio es $(1, 1, 0)^t$.