MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 10 : Teorema del Núcleo-Imagen y Representación

13 de noviembre del 2016

P1. [Varios]

a) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ una función lineal tal que:

$$\begin{aligned} T(1) &= 3 + 2x + 4x^2 \\ T(x) &= 2 + 2x^2 \\ T(x^2) &= 4 + 2x + 3x^2 \end{aligned}$$

Calcule $M_{BB'}(T)$ donde B es la base canónica y $B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

b) Sea V un espacio vectorial tal que $\dim V = n \in \mathbb{N}$.

1) Muestre que si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$, entonces n es par y el rango de T es $\frac{n}{2}$.
2) Suponga ahora que n es par. Demuestre que si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $T^2 \equiv 0$ y el rango de T es $\frac{n}{2}$, entonces $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$.

Solución 1.

a) La idea es escribir la transformación lineal respecto a sus bases en la partida y la llegada, notemos que en la partida ya estamos listos. Reescribiendo tenemos:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 - 2(1+x) + 4(1+x+x^2) \\ T(x) &= 2 - 2(1+x) + 2(1+x+x^2) \\ T(x^2) &= 2 - (1+x) + 3(1+x+x^2) \end{aligned}$$

Luego la matriz representante nos queda:

$$M_{BB'}(T) = \begin{pmatrix} \hat{T}(1) & \hat{T}(x) & \hat{T}(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) 1) Por TNI:

$$n = \dim V = \operatorname{null}(T) + \operatorname{rango}(T) = 2 \operatorname{rango}(T)$$

De donde concluimos que n es par y que $\operatorname{rango}(T) = \frac{n}{2}$.

2) Por el TNI:

$$n = \operatorname{null}(T) + \frac{n}{2}$$

Por tanto $\operatorname{null}(T) = \frac{n}{2}$ y $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$. Notemos que solo falta $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$ (o al revés). Sea $x \in \operatorname{Im}(T)$, luego $x = T(y)$. Por tanto:

$$T(y) = T(T(x)) = T^2(x) = 0$$

Lo que implica $x \in \operatorname{Ker}(T)$. Con esto concluimos que $\operatorname{Im}(T)$ es s.e.v. de $\operatorname{Ker}(T)$ y por último que $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Ker}(T)$.

P2. [Varios]

a) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por:

$$T(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$$

Considere las bases de $\mathcal{P}_2$, $B = \{1, x, x^2\}$, $B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ y $B'' = \{15+x, 1-4x, x^2\}$. Calcule $M_{BB}(T)$, $M_{BB''}(T)$ y $M_{B'B'}(T)$. ¿Existen α, β bases de $\mathcal{P}_2$ tal que $M_{\alpha\beta}(T)$ sea invertible?

b) Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{M}_{44}(\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y+w & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine si existe α base de $\mathbb{R}^4$ y β base de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ tal que $M_{\alpha\beta}(f) = A$.

Solución 2.

a) Evaluando y escribiendo en la base canónica tenemos:

$$\begin{aligned} T(1) &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ T(x) &= 1\cdot 1 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^2 \\ T(x^2) &= 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \end{aligned}$$

Luego la matriz representante nos queda:

$$M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular $M_{BB''}(T)$ ocuparemos matrices de cambio de base. Notemos que el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P}_2)_B \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T"'] & (\mathcal{P}_2^T)_B \arrow[d, "Id_{BB''}"] \\ & (\mathcal{P}_2^T)_{B''} \end{tikzcd}$$

Nos dice que:

$$M_{BB''}(T) = M_{BB''}(Id_{BB''} \circ T) = M_{BB''}(Id)M_{BB}(T)$$

Luego nos falta solo calcular $M_{BB''}(I)$. Para esto hacemos lo mismo de siempre (evaluar en la base de partida y escribir en terminos de la base de llagada):

$$\begin{aligned} Id(1) &= a\cdot(15+x) + b\cdot(1-4x) + 0\cdot x^2 \\ Id(x) &= c\cdot(15+x) + d\cdot(1-4x) + 0\cdot x^2 \\ Id(x^2) &= 0\cdot(15+x) + 0\cdot(1-4x) + 1\cdot x^2 \end{aligned}$$

Recordando que las igualdades anteriores son de polinomios, tenemos entonces los siguientes sistemas para a, b, c y d:

$$\begin{aligned} 1 &= 15a + b \qquad & 0 &= 15c + d \\ 0 &= a - 4b \qquad & 1 &= c - 4d \end{aligned}$$

Resolviendo los sistemas tenemos $a = \frac{4}{61}$, $b = \frac{1}{61}$, $c = \frac{1}{61}$ y $d = -\frac{15}{61}$. Reemolazando tenemos:

$$\begin{aligned} Id(1) &= \frac{4}{61} \cdot (15 + x) + \frac{1}{61} \cdot (1 - 4x) + 0 \cdot x^2 \\ Id(x) &= \frac{1}{61} \cdot (15 + x) - \frac{15}{61} \cdot (1 - 4x) + 0 \cdot x^2 \\ Id(x^2) &= 0 \cdot (15 + x) + 0 \cdot (1 - 4x) + 1 \cdot x^2 \end{aligned}$$

De donde tenemos que:

$$M_{BB''}(Id) = \begin{pmatrix} \frac{4}{61} & \frac{1}{61} & 0 \\ \frac{1}{61} & -\frac{15}{61} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuevamente haciendo el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P}_2)_B \arrow[r, "T"] & (\mathcal{P}_2^T)_B \arrow[d, "Id_{BB'}"] \\ (\mathcal{P}_2)_{B'} \arrow[u, "Id_{B'B}"] \arrow[r, "T"'] & (\mathcal{P}_2^T)_{B'} \end{tikzcd}$$

Apoyandonos del diagrama y notando que $M_{B'B}(Id) = M_{BB'}(Id)^{-1}$, tenemos:

$$M_{B'B'}(T) = M_{B'B'}(Id_{BB'} \circ T \circ Id_{B'B}) = M_{B'B}(Id) M_{BB}(T) M_{B'B}(Id)^{-1}$$

Nos falta solo conocer $M_{B'B}(Id)$, evaluando B' y escribiendo en terminos de B tenemos:

$$\begin{aligned} Id(1) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ Id(1 + x) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ Id(1 + x + x^2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$M_{B'B}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto:

$$M_{B'B'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Para responder la pregunta del final basta con notar que T no es inyectiva (por ejemplo $T(1) = T(2)$) luego:

$$T \text{ no es biyectiva} \iff M_{\alpha\beta}(T) \text{ no es invertible}$$

De donde concluimos que no existen dichos α y β.

b) No existen dichas bases, esto se debe a que la función de la izquierda no es biyectiva (no es sobreyectiva puesto que no puede generar matrices que verifiquen $a_{22} \neq 0$) y por lo tanto su matriz representante no puede ser invertible (pero A si lo es).

P3. [P3 Control 2, Año 2009]
Sea $T : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimensión n.

a) Sea $T^k = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ veces}}$ con $1 \leq k \leq n$.

1) Demuestre que $\operatorname{Ker} T^k \subseteq \operatorname{Ker} T^{k+1}$.
2) Demuestre que $T^{k+1}(V)$ es subespacio vectorial de $T^k(V)$. Concluya que rango$(T^{k+1}) \leq$ rango(T^k).

b) Suponga existe $k_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $T^{k_0+1}(V) = T^{k_0}$, pruebe que $T^k(V) = T^{k_0}(V)$ para todo $k \geq k_0$.

c) Demuestre que el k_0 de la parte anterior existe.

d) Sea $U = T^n(V)$. Pruebe que $S : U \to U$ definida por:

$$S(x) = T(x)$$

es un isomorfismo.

Solución 3.

a) 1) Sea $x \in \operatorname{Ker}(T^k)$, luego $T^k(x) = 0$. Por tanto:

$$T^{k+1}(x) = T(T^k(x)) = T(0) = 0$$

Por tanto $x \in \operatorname{Ker}(T^{k+1})$.

2) Sabemos que es espacio vectorial, por tanto basta con mostrar que $T^{k+1}(V) \subseteq T^k(V)$. Sea $x \in T^{k+1}(V)$, luego:

$$x = T^{k+1}(y) = T^k(\underbrace{T(y)}_{z}) = T^k(z)$$

Conlo que concluimos que $T^{k+1}(V)$ es s.e.v. de T^k. La desigualdad para las dimensiones se sigue del hecho que uno es s.e.v. del otro.

b) Razonaremos por inducción, queremos probar que $T^{k_0+n}(V) = T^{k_0}(V)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El caso base $n = 0$ se tiene, para el caso $n + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} T^{k_0+n+1}(V) &= T^{k_0+n} \circ T(V) \\ &= T^{k_0} \circ T(V) \\ &= T^{k_0+1}(V) \\ &= T^{k_0}(V) \end{aligned}$$

Con lo que concluimos lo pedido.

c) Ocuparemos la siguiente proposición:

$$E \text{ es s.e.v. de } F \text{ y } \dim E = \dim F \iff E = F$$

Supongamos no existe el k_0, ademas si $\dim T^{k+1}(V) = \dim T^k(V)$, por la proposición tendríamos que $T^{k+1}(V) = T^k(V)$ lo que implica la existencia de algun k_0, por tanto :

$$\dim T^{k+1}(V) < \dim T^k(V) \quad \forall k$$

Notemos además que T no es sobreyectiva (sino T sería biyectiva y por tanto T^2 también y por ende $\dim T^2(V) = \dim T(V)$). Luego en cada iteración la dimensión se disminuye a lo menos en 1. Luego, iterando n veces:

$$\dim T^n(V) + n < \dim T(V) < \dim V = n$$

Lo que implica $\dim T^n(V) < 0$, lo que es una contradicción.

d) Basta con ver que $S(U) = U$ (puesto que eso implica que S es sobreyectiva y por un corolario del TNI esto implica que es biyectiva) . En efecto:

$$S(U) = T(U) = T(T^n(V)) = T^{k_0}(V) = T^n(V) = U$$

Con lo que concluimos que S es biyección.

P4. [Aplicaciones del TNI]

a) Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal y $\dim V < \infty$. Demuestre que:

$$V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T) \iff \mathrm{Ker}(T^2) = \mathrm{Ker}(T)$$

b) Sea A una matriz de 2×2 y $k \geq 2$. Demuestre que:

$$A^k = 0 \iff A^2 = 0$$

c) Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una función lineal. Demuestre que para todo subespacio $K \subseteq W$ se tiene que:

$$\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \mathrm{Im}(f)) + \mathrm{null}(f)$$

Obs: No es necesario que demuestre que $f^{-1}(K)$ es un espacio vectorial.

Solución 4.

a)
- ($\Longrightarrow$)
  Notemos que como para toda transformación lineal $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^2)$ basta con probar la otra inclusión. Sea $x \in \mathrm{Ker}(T^2)$, es decir $T(T(x)) = 0$, por lo tanto $T(x) \in \mathrm{Ker}(T)$ y además $T(x) \in \mathrm{Im}(T)$, luego como $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$, concluimos que $T(x) = 0$ lo que implica $x \in \mathrm{Ker}(T)$.
- ($\Longleftarrow$)
  Veamos primero que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$. En efecto Sea $x \in \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)$, luego $T(x) = 0$ y $x = T(y)$, reemplazando tenemos que $T(T(y)) = 0$, luego $y \in Ker(T^2)$, por tanto $y \in KerT$. Entonces $T(y) = x = 0$, con lo que concluimos $Ker(T) \cap Im(T) = \{0\}$ y más aun $Ker(T) \oplus Im(T)$.
  Nosotros sabemos que $Ker(T) \oplus Im(T)$ es s.e.v. de V, además usando la formula de Grassmann y el TNI tenemos que:

$$\dim(\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rango}(T) + \mathrm{null}(T) = \dim V$$

  Luego $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ es un s.e.v. de V con la misma dimensión, por tanto $Ker(T) \oplus Im(T) = V$.

b) Supongamos en busca de una contradicción que $A^2 \neq 0$ (notemos que en particular $A \neq 0$). Definamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como:

$$f(x) = Ax$$

Notemos que f no puede ser biyectiva (sino $A^k \neq 0$) y por lo tanto f no es inyectiva (pues son equivalentes por un corolario del TNI), entonces $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$, además como $A \neq 0$ tenemos que $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathbb{R}^2$. Ocupando el TNI tenemos:

$$2 = \mathrm{rango}(f) + \underbrace{\mathrm{null}(f)}_{\neq 0, \neq 2}$$

Por tanto $\mathrm{rango}(f) = \mathrm{null}(f) = 1$. Definamos además $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como:

$$g(x) = A^2 x$$

Aplicando el mismo argumento que para f tenemos que $\mathrm{rango}(g) = \mathrm{null}(g) = 1$. Notando que $g = f^2$ vemos que $\mathrm{Im}(g)$ es s.e.v. de $\mathrm{Im}(f)$ (Por la **P3** *b*)) y además es de igual dimensión, es decir $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Notemos entonces que:

$$A^2 x = A \underbrace{(Ax)}_{\in \mathrm{Im}(f)}$$

Como $Ax \in \mathrm{Im}(f)$, entonces está en $\mathrm{Im}(g)$ y por tanto se puede escribir como $Ax = A^2 x_0$, luego:

$$A^2 x = A^3 x_0 = A^2 \underbrace{(Ax_0)}_{\in \mathrm{Im}(f)}$$

De donde vemos que $Ax_0 \in \text{Im}(g)$ y por tanto $Ax_0 = A^2x_1$. Luego:

$$A^2x = A^3x_0 = A^4x_1$$

Notemos que esto se puede repetir $k-2$ veces hasta obtener:

$$A^2x = A^3x_0 = A^4x_1 = \ldots = A^k x_{k-3} = 0$$

De donde obtenemos que $A^2x = 0$ para todo x, es decir $\text{Ker}(g) = \mathbb{R}^2$ lo que es una contradicción.

c) Definamos $g : f^{-1}(K) \subseteq V \to K \subseteq W$ como:

$$g(x) = f(x)$$

Es claro que g es lineal (pues f lo es), aplicando el TNI sobre g tenemos:

$$\dim(f^{-1}(K)) = \dim(\text{Im}(g)) + \dim(\text{Ker}(g))$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\text{Im}(g) &= \{g(x) \in K : x \in f^{-1}(K)\} \\
&= \{g(x) \in K\} \\
&= K \cap \{g(x) \in W\} \\
&= K \cap \text{Im}(f)
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(g) &= \{x \in f^{-1}(K) : f(x) = 0\} \\
&= f^{-1}(K) \cap \{x \in V : f(x) = 0\} \\
&= f^{-1}(K) \cap \text{Ker}(f)
\end{aligned}$$

Notando que $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(K)$ (pues $0 \in K$) tenemos que:

$$\text{Ker}(g) = f^{-1}(K) \cap \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f)$$

Reemplazando en lo obtenido del TNI:

$$\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \text{Im}(f)) + \text{null}(f)$$

Que era lo pedido.

P5. [P3 Control 2, Año 2014]
Sea $T : \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ la transformación definida como:

$$T(A) = MA + AM, \text{ donde } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que T es lineal.

b) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.

c) Calcule bases y dimensiones para $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$. Analice inyectividad y sobreyectividad de T.

d) Pruebe que $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T) = \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.

Solución 5.

a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego:

$$\begin{aligned} T(\lambda A + B) &= M(\lambda A + B) + (\lambda A + B)M \\ &= \lambda MA + \lambda AM + MB + BM \\ &= \lambda(MA + AM) + MB + BM \\ &= \lambda T(A) + T(B) \end{aligned}$$

b) Notemos que:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & a+d \\ a+d & b+c \end{pmatrix}$$

Evaluemos en la base canónica:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego:

$$M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Notemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T) &= \{A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : T(A) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} b+c & a+d \\ a+d & b+c \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : b = -c, a = -d \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \right\} \end{aligned}$$

De esto vemos que el conjunto:

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

Genera $\mathrm{Ker}(T)$ y es l.i. (puesto que ninguno es combinación lineal de los otros). De esto vemos que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$.

Para $\mathrm{Im}(T)$, notemos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T) &= \{T(A) : A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}b+c & a+d\\ a+d & b+c\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}u & v\\ v & u\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\right\}\end{aligned}$$

Donde en la última linea hicimos el cambio de variable $u = b + c$ y $v = a + d$. Luego el conjunto:

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

Es l.i. y genera $\mathrm{Im}(T)$, por tanto es base y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

d) Demostremos primero que la suma es directa. En efecto sea $A \in \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)$, luego tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ -b & -a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u & v\\ v & u\end{pmatrix}$$

De donde tenemos que $a = u = -u$ y $b = v = -v$, por tanto $a = b = 0$ y $A = 0$. Para concluir notemos que:

$$\dim(\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4$$

Luego $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ es un subespacio de igual dimensión a $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, por tanto $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T) = \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.