MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 10 : Teorema del Núcleo-Imagen y Representación

13 de noviembre del 2016

Recordemos:

- **TNI :** Sea $T : U \to V$ una transformación lineal donde $\dim U < \infty$, entonces:
$$\dim U = \text{rango}(T) + \text{null}(T)$$
- Sea $T : U \to V$ lineal.
  1. Si $\dim U = \dim V$:
  $$T \text{ inyectiva} \iff T \text{ sobreyectiva} \iff T \text{ biyectiva}$$
  2. Si $\dim U > \dim V$, entonces T no puede ser inyectiva.
  3. Si $\dim U < \dim V$ no puede ser sobreyectiva.
- Dos espacios E y V de dimensión finita son isomorfos si y sólo si $\dim E = \dim V$.
- Toda transformación lineal $T : U \to V$ queda determinada por su acción sobre bases. Es decir si:
$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} v_i$$
Donde $u_j \in \beta_U$ y $v_i \in \beta_V$ son elementos de la base de U y V respectivamente. A la matriz
$$(M_{\beta_U,\beta_V}(T))_{ij} = a_{ij}$$
la llamaremos matriz representante de la transformación lineal.

P1. [**Varios**]

a) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ una función lineal tal que:
$$\begin{aligned} T(1) &= 3 + 2x + 4x^2 \\ T(x) &= 2 + 2x^2 \\ T(x^2) &= 4 + 2x + 3x^2 \end{aligned}$$
Calcule $M_{BB'}(T)$ donde B es la base canónica y $B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

b) Sea V un espacio vectorial tal que $\dim V = n \in \mathbb{N}$.
  1) Muestre que si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $\text{Ker}\, T = \text{Im}\, T$, entonces n es par y el rango de T es $\frac{n}{2}$.
  2) Suponga ahora que n es par. Demuestre que si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $T^2 \equiv 0$ y el rango de T es $\frac{n}{2}$, entonces $\text{Ker}\, T = \text{Im}\, T$.

P2. [**Representación y Cambio de Base**]

a) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por:
$$T(p(x)) = \frac{d}{dx} p(x)$$
Considere las bases de $\mathcal{P}_2$, $B = \{1, x, x^2\}$, $B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ y $B'' = \{15+x, 1-4x, x^2\}$. Calcule $M_{BB}(T)$, $M_{BB''}(T)$ y $M_{B'B'}(T)$. ¿Existen α, β bases de $\mathcal{P}_2$ tal que $M_{\alpha\beta}(T)$ sea invertible?

b) Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{M}_{44}(\mathbb{R})$
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y+w & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Determine si existe α base de $\mathbb{R}^4$ y β base de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ tal que $M_{\alpha\beta}(f) = A$.

P3. [P3 Control 2, Año 2009]
Sea $T : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimensión n.

a) Sea $T^k = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ veces}}$ con $1 \leq k \leq n$.

1) Demuestre que $\operatorname{Ker} T^k \subseteq \operatorname{Ker} T^{k+1}$.
2) Demuestre que $T^{k+1}(V)$ es subespacio vectorial de $T^k(V)$. Concluya que rango$(T^{k+1}) \leq$ rango(T^k).

b) Suponga existe $k_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $T^{k_0+1}(V) = T^{k_0}$, pruebe que $T^k(V) = T^{k_0}(V)$ para todo $k \geq k_0$.

c) Demuestre que el k_0 de la parte anterior existe.

d) Sea $U = T^n(V)$. Pruebe que $S : U \to U$ definida por:

$$S(x) = T(x)$$

es un isomorfismo.

P4. [Aplicaciones del TNI]

a) Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal y $\dim V < \infty$. Demuestre que:

$$V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T) \iff \operatorname{Ker}(T^2) = \operatorname{Ker}(T)$$

b) Sea A una matriz de 2×2 y $k \geq 2$. Demuestre que:

$$A^k = 0 \iff A^2 = 0$$

c) Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una función lineal. Demuestre que para todo subespacio $K \subseteq W$ se tiene que:

$$\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \operatorname{Im}(f)) + \operatorname{null}(f)$$

Obs: No es necesario que demuestre que $f^{-1}(K)$ es un espacio vectorial.

P5. [P3 Control 2, Año 2014]
Sea $T : \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ la transformación definida como:

$$T(A) = MA + AM, \text{ donde } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que T es lineal.

b) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.

c) Calcule bases y dimensiones para $\operatorname{Ker}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$. Analice inyectividad y sobreyectividad de T.

d) Pruebe que $\operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T) = \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.